

La conjecture de Sard sous-riemannienne

Ludovic Rifford

Université Nice Sophia Antipolis

Colloquium
Université d'Orsay

Le théorème de Brown-Morse-Sard

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^k .

Definition

- On appelle **point critique** de f tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $d_x f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ n'est pas surjective et on note C_f l'ensemble des points critiques de f .
- On appelle **valeur critique** tout élément de $f(C_f)$. Les éléments de $\mathbb{R}^m \setminus f(C_f)$ sont appelés **valeurs régulières**.

Remarques :

- Si $n < m$ tous les points sont critiques.
- Si $n \geq m$ et y est une valeur régulière de f , alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - m$ et de classe C^k .

Le théorème de Brown-Morse-Sard



H.C. Marston Morse (1892-1977)



Arthur B. Brown (1905-1999)



Anthony P. Morse (1911-1984)



Arthur Sard (1909-1980)

Le théorème de Brown-Morse-Sard

Théorème (Arthur B. Brown, 1935)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^k . Si $k = \infty$ (ou assez grand) alors $f(C_f)$ est d'intérieur vide.

Théorème (Anthony P. Morse, 1939)

Si $m = 1$ et $k \geq m$, alors $f(C_f)$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Théorème (Arthur Sard, 1942)

Si $k \geq \max\{1, n - m + 1\}$, alors $\mathcal{L}^m(f(C_f)) = 0$.

Remarque

Grâce à la construction d'une fonction non-constante sur un ensemble de point critique connexe dû à Hassler Whitney en 1935, l'hypothèse du dernier résultat est optimal.

En dimension infinie (Bates-Moreira, 2001)

Le théorème de Sard est faux en dimension infinie. Soit $f : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (3 \cdot 2^{-n/3} x_n^2 - 2x_n^3).$$

La fonction f est polynomiale ($f^{(4)} \equiv 0$) d'ensemble critique

$$C(f) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \mid x_n \in \{0, 2^{-n/3}\} \right\},$$

ayant pour image

$$f(C(f)) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n 2^{-n} \mid \delta_n \in \{0, 1\} \right\} = [0, 1].$$

Structures sous-riemanniennes

Soit M une variété riemannienne lisse connexe de dimension $n \geq 2$.

Definition

Une structure sous-riemannienne sur M correspond à la donnée d'une paire (Δ, g) où :

- Δ est une **distribution totalement non-holonome** de rang $m \in [2, n]$, i.e. définie localement par

$$\Delta(x) = \text{Vect} \left\{ X^1(x), \dots, X^m(x) \right\} \subset T_x M,$$

où X^1, \dots, X^m est une famille de m champ de vecteurs linéairement indépendants vérifiant la condition de Hörmander.

- g_x est un **produit scalaire** sur $\Delta(x)$.

La condition de Hörmander

On dit qu'une famille de champs de vecteurs X^1, \dots, X^m vérifie la **condition de Hörmander** si

$$\text{Lie} \{X^1, \dots, X^m\} (x) = T_x M \quad \forall x \in M,$$

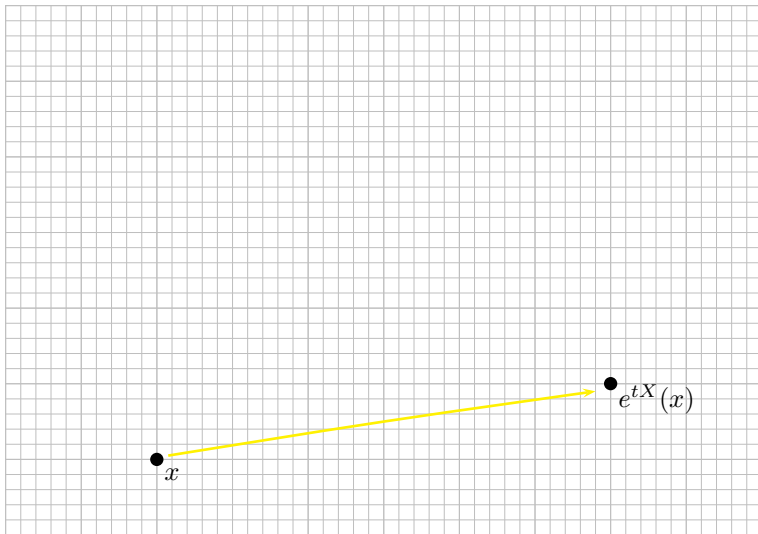
où $\text{Lie}\{\dots\}$ désigne l'algèbre de Lie engendrée par les champs X^1, \dots, X^m , i.e. le plus petit sous-espace contenant les X^1, \dots, X^m et stable par crochet de Lie.

Rappel

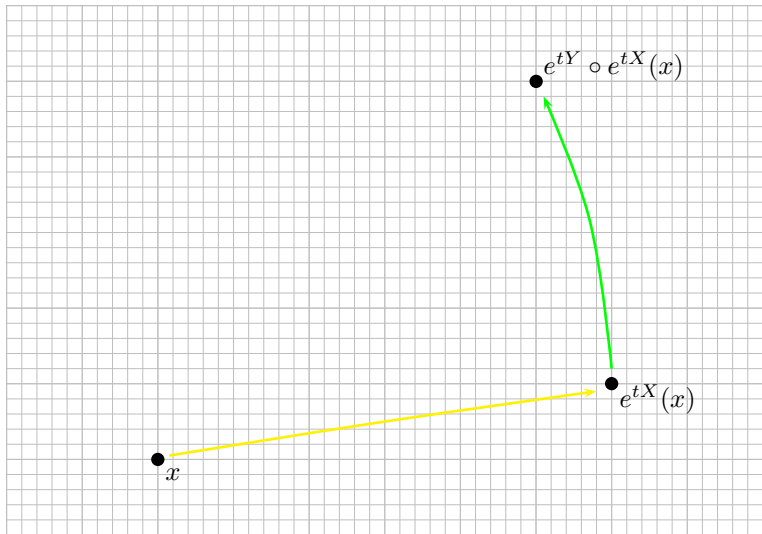
Étant donnés deux champs de vecteurs lisses X, Y dans \mathbb{R}^n , le crochet de Lie $[X, Y]$ en $x \in \mathbb{R}^n$ est défini par

$$[X, Y](x) = DY(x)X(x) - DX(x)Y(x).$$

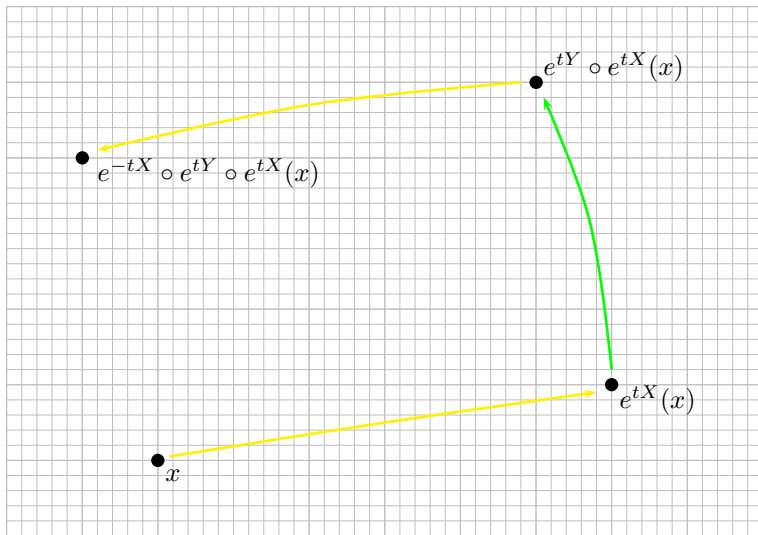
Vision dynamique



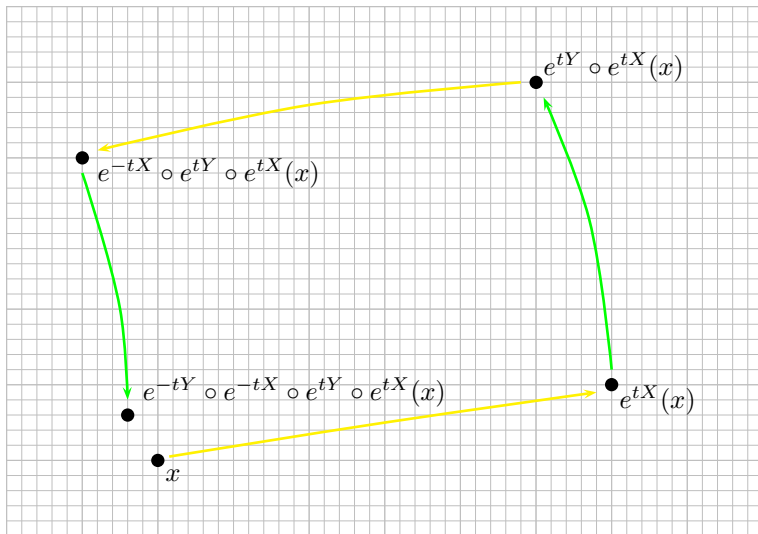
Vision dynamique



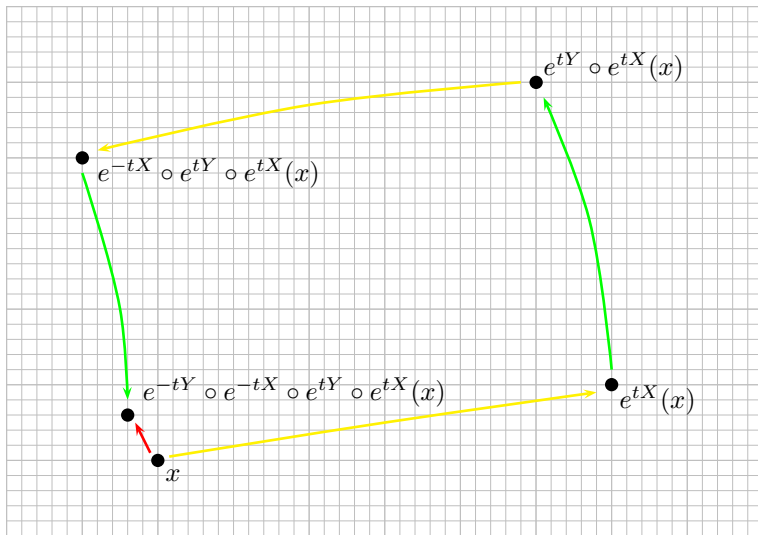
Vision dynamique



Vision dynamique



Vision dynamique

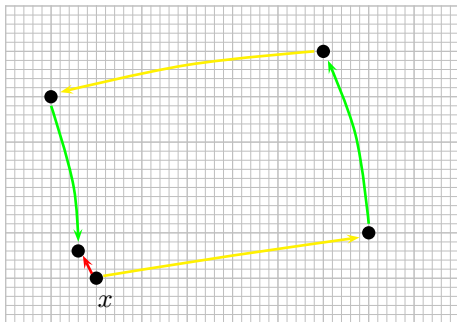


Vision dynamique

Exercice

On a

$$[X, Y](x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{(e^{-tY} \circ e^{-tX} \circ e^{tY} \circ e^{tX})(x) - x}{t^2}.$$



Le théorème de Chow-Rashevsky

Definition

On appelle **chemin horizontal** tout $\gamma \in W^{1,2}([0, 1]; M)$ tel que

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta(\gamma(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, 1].$$

Le théorème suivant constitue la raison d'être de la géométrie sous-riemannienne. Rappelons que M est supposée connexe.

Théorème (Chow-Rashevsky, 1938)

Soit Δ une distribution totalement nonholonome sur M alors toute paire de points peut être reliée par un chemin horizontal.

Comme on dispose d'une métrique sur la distribution, on va pouvoir mesurer les longueurs des courbes horizontales et par conséquent associer une métrique à une structure SR.

Exemples de structures sous-riemanniennes

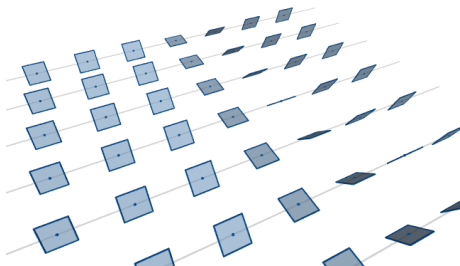
Exemple (Cas riemannien)

Toute variété riemannienne (M, g) fournit un exemple de structure sous-riemannienne avec $\Delta = TM$.

Exemple (Heisenberg)

Dans \mathbb{R}^3 , $\Delta = \text{Vect}\{X^1, X^2\}$ avec

$$X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_y + x\partial_z \quad \text{et} \quad g = dx^2 + dy^2.$$



Exemples de structures sous-riemanniennes

Exemple (Martinet)

Dans \mathbb{R}^3 , $\Delta = \text{Vect}\{X^1, X^2\}$ avec

$$X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_y + x^2 \partial_z.$$

Comme $[X^1, X^2] = 2x\partial_z$ et $[X^1, [X^1, X^2]] = 2\partial_z$, un seul crochet est nécessaire pour engendrer \mathbb{R}^3 si $x \neq 0$ et il faut deux crochets si $x = 0$.

Exemple (Distribution de rang 2 en dimension 4)

Dans \mathbb{R}^4 , $\Delta = \text{Vect}\{X^1, X^2\}$ avec

$$X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_y + x\partial_z + z\partial_w$$

vérifie $\text{Vect}\{X^1, X^2, [X^1, X^2], [[X^1, X^2], X^2]\} = \mathbb{R}^4$.

La distance sous-riemannienne

La **longueur** d'un chemin horizontal γ est définie par

$$\text{long}^g(\gamma) := \int_0^T |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)}^g dt.$$

Definition

Étant donnés $x, y \in M$, la **distance sous-riemannienne** entre x et y est définie par

$$d_{SR}(x, y) := \inf \left\{ \text{length}^g(\gamma) \mid \gamma \text{ hor.}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\}.$$

Proposition

La variété M équipée de la distance d_{SR} est un espace métrique dont la topologie coincide avec celle de M (comme variété).

Definition

Étant donnés $x, y \in M$, on appelle **chemin horizontal minimisant** entre x et y tout chemin horizontal $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ reliant x à y tel que $d_{SR}(x, y) = \text{long}^g(\gamma)$.

L'**énergie** d'un chemin horizontal $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est définie par

$$\text{ener}^g(\gamma) := \int_0^1 \left(|\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)}^g \right)^2 dt.$$

Definition

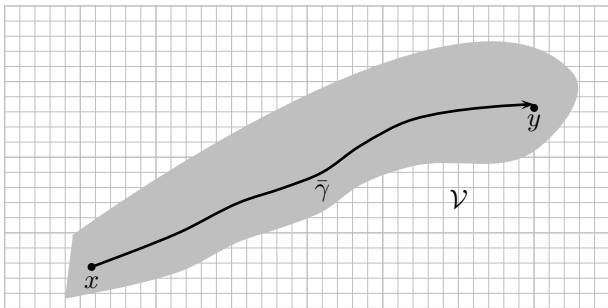
On appelle **géodésique minimisante** entre x et y tout chemin horizontal $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ reliant x à y tel que

$$d_{SR}(x, y)^2 = \text{ener}^g(\gamma).$$

L'équation géodésique hamiltonienne

Soit $x, y \in M$ et $\bar{\gamma}$ une **géodésique minimisante** reliant x à y fixée. La structure SR admet **un repère orthonormé** le long de $\bar{\gamma}$, c'est à dire qu'il existe un voisinage ouvert de \mathcal{V} de $\bar{\gamma}([0, 1])$ et une famille orthonormée de m champs de vecteurs X^1, \dots, X^m tel que

$$\Delta(z) = \text{Vect} \left\{ X^1(z), \dots, X^m(z) \right\} \quad \forall z \in \mathcal{V}.$$



L'équation géodésique hamiltonienne

Il existe un contrôle $\bar{u} \in L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ tel que

$$\dot{\bar{\gamma}}(t) = \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) X^i(\bar{\gamma}(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, 1].$$

De plus, tout contrôle $u \in \mathcal{U} \subset L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ (u suffisamment proche de \bar{u}) donne naissance à une trajectoire γ_u solution de

$$\dot{\gamma}_u = \sum_{i=1}^m u^i X^i(\gamma_u) \quad \text{sur } [0, T], \quad \gamma_u(0) = x.$$

Et d'autre part, pour tout chemin horizontal $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{V}$ il existe un (unique) contrôle $u \in L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ pour lequel l'équation en rouge est satisfaite.

L'équation géodésique hamiltonienne

Ainsi, si on considère l'application **End-Point mapping**

$$E^{x,1} : L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m) \longrightarrow M$$

définie par

$$E^{x,1}(u) := \gamma_u(1),$$

et si on pose $C(u) = \|u\|_{L^2}^2$, alors \bar{u} est solution du **problème d'optimisation avec contraintes** suivant :

\bar{u} minimise $C(u)$ parmi tous les $u \in \mathcal{U}$ t.q. $E^{x,1}(u) = y$.

(Comme la famille X^1, \dots, X^m est orthonormée, on a

$$\text{ener}^g(\gamma_u) = C(u) \quad \forall u \in \mathcal{U}.)$$

L'équation géodésique hamiltonienne

Proposition (Multipliateurs de Lagrange)

Il existe $p \in T_y^*M \simeq (\mathbb{R}^n)^*$ et $\lambda_0 \in \{0, 1\}$ tels que $(\lambda_0, p) \neq (0, 0)$ et

$$p \cdot d_{\bar{u}} E^{x,1} = \lambda_0 d_{\bar{u}} C.$$

En effet, la fonction définie par

$$\Phi(u) := (C(u), E^{x,1}(u))$$

ne peut pas être une submersion en \bar{u} . Sinon $D_{\bar{u}}\Phi$ serait surjective et donc ouverte en \bar{u} , ce qui signifie que l'image de Φ devrait contenir des points de la forme $(C(\bar{u}) - \delta, y)$ avec $\delta > 0$ petit.

↪ Deux cas peuvent se présenter: $\lambda_0 = 1$ ou $\lambda_0 = 0$.

L'équation géodésique hamiltonienne

Premier cas : $\lambda_0 = 1$

Définissons l'hamiltonien $H : \mathcal{V} \times (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$H(x, p) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (p \cdot X^i(x))^2.$$

Proposition

Il existe un arc lisse $p : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ vérifiant $p(1) = p/2$ tel que

$$\begin{cases} \dot{\bar{\gamma}} &= \frac{\partial H}{\partial p}(\bar{\gamma}, p) = \sum_{i=1}^m [p \cdot X^i(\bar{\gamma})] X^i(\bar{\gamma}) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(\bar{\gamma}, p) = -\sum_{i=1}^m [p \cdot X^i(\bar{\gamma})] p \cdot D\bar{\gamma} X^i \end{cases}$$

p.p. $t \in [0, 1]$ et $\bar{u}_i(t) = p(t) \cdot X^i(\bar{\gamma}(t))$ *p.p.* $t \in [0, 1]$ (pour tout i). **En particulier, le chemin $\bar{\gamma}$ est lisse sur $[0, 1]$.**

L'équation géodésique hamiltonienne

Deuxième cas : $\lambda_0 = 0$

Dans ce cas, on a

$$p \cdot D_{\bar{u}} E^{x,1} = 0 \text{ avec } p \neq 0,$$

ce qui signifie que \bar{u} est **singulier**, c'est à dire qu'il s'agit d'un point critique de $E^{x,1}$.

Proposition

Il existe un arc absolument continu $p : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^n)^$ vérifiant $p(1) = p/2$ tel que*

$$\begin{cases} \dot{\bar{\gamma}} &= \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) X^i(\bar{\gamma}(t)) \\ \dot{p} &= -\sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) p \cdot D\bar{\gamma}(t) X^i \end{cases}$$

p.p. $t \in [0, 1]$ et $p(t) \cdot X^i(\bar{\gamma}(t)) = 0$ pour tout t et pour tout i .

L'équation géodésique hamiltonienne

Pour résumer, si on définit l'hamiltonien $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \max \left\{ \frac{p(v)^2}{g_x(v, v)} \mid v \in \Delta_x \setminus \{0\} \right\}$$

alors on a le résultat suivant :

Théorème

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ une géodésique minimisante pour la structure SR (Δ, g) . Alors γ vérifie l'une des deux propriétés (non nécessairement exclusives) suivantes :

- *γ est un chemin horizontal singulier.*
- *γ est la projection d'une extrémale normale, c'est à dire d'une solution $\psi : [0, 1] \rightarrow T^*M$ de $\dot{\psi}(t) = \vec{H}(\psi(t))$.*

Exemple 1: Le cas riemannien

Pour $\Delta(x) = T_x M$ pour tout $x \in M$, TOUT chemin dans $W^{1,2}$ est horizontal. De plus, il n'existe pas de chemin singulier, par conséquent toute géodésique minimisante est la projection d'une extrémale normale.

Exemple 2: Heisenberg et distributions fat

Dans \mathbb{R}^3 , la distribution Δ donnée par $\Delta = \text{Vect}\{X^1, X^2\}$ avec

$$X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_y + x\partial_z$$

est un exemple de distribution fat qui n'admet pas de chemin horizontal singulier non-trivial.

Exemples

Exemple 3: Les distributions de type Martinet

Dans \mathbb{R}^3 , soit $\Delta = \text{Vect}\{X^1, X^2\}$ avec X^1, X^2 de la forme

$$X^1 = \partial_{x_1} \quad \text{and} \quad X^2 = (1 + x_1\phi(x)) \partial_{x_2} + x_1^2 \partial_{x_3},$$

où ϕ est une fonction lisse et g une métrique lisse sur Δ .

Théorème (Montgomery)

Il existe $\bar{\epsilon} > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$, le chemin horizontal singulier donné par

$$\gamma(t) = (0, t, 0) \quad \forall t \in [0, \epsilon],$$

minimise la longueur (pour g) parmi tous les chemins horizontaux joignant 0 à $(0, \epsilon, 0)$. De plus, si $\{X^1, X^2\}$ est orthonormal pour g et $\phi(0) \neq 0$, alors γ n'est pas la projection d'une extrémale normale.

La conjecture de Sard sous-riemannienne

Rappel : un chemin horizontal est dit singulier "si" c'est un point critique de la End-Point mapping $E^{x,1} : L^2 \rightarrow M$. Étant donnée une structure SR (Δ, g) et $x \in M$ fixé, on définit

$$\mathcal{S}_{\Delta, \min^g}^x = \{\gamma(1) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = x, \gamma \text{ hor.}, \text{ sing.}, \text{ min.}\}.$$

Conjecture (Conjecture de Sard SR)

L'ensemble $\mathcal{S}_{\Delta, \min^g}^x$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Cette conjecture est ouverte. Par un résultat de Agrachev, on sait que $\mathcal{S}_{\Delta, \min^g}^x$ est d'intérieur vide.

La conjecture de Sard forte

Étant donnée une distribution totalement non-holonome Δ et $x \in M$ fixé, définissons maintenant

$$\mathcal{S}_\Delta^x = \{\gamma(1) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = x, \gamma \text{ hor.}, \text{sing.}\}.$$

Conjecture (Conjecture de Sard)

L'ensemble \mathcal{S}_Δ^x est de mesure de Lebesgue nulle.

Cette conjecture est ouverte. On s'attend en fait à des résultats encore plus forts !!!

↪ Cas des distributions de rang 2 en dimension 3.

La conjecture de Sard sur les surfaces de Martinet

Soit M une variété compacte de dimension 3 et Δ une distribution totalement non-holonome de rang 2 sur M . On définit la **surface de Martinet** par

$$\Sigma_{\Delta} = \{x \in M \mid \Delta(x) + [\Delta, \Delta](x) \neq T_x M\}$$

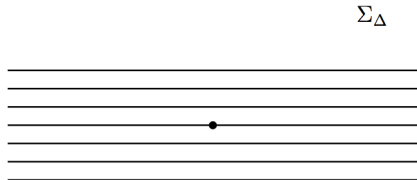
Pour une distribution générique, Σ_{Δ} est une surface. Si Δ est analytique alors Σ_{Δ} est un ensemble analytique de $\dim \leq 2$.

Proposition

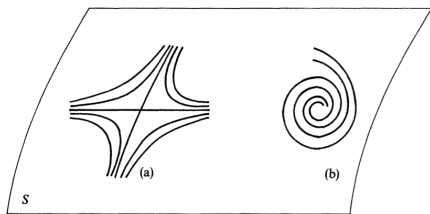
Les courbes horizontales singulières correspondent exactement aux orbites de la trace de la distribution Δ sur Σ_{Δ} .

\rightsquigarrow Fixons x sur Σ_{Δ} et voyons quelle est l'orbite de x .

Cas transverse



Cas tangent générique (Zelenko-Zhitomirskii, 1995)



Merci pour votre attention !!