UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2003-2004

Corrigé de l'examen du 4 mai 2004

1. Question de cours : ...

2. (a)
   - Si $t < 0$, $\mathbb{P}(\sup(U, X) \leq t) = 0$.
   - Si $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sup(U, X) \leq t) &= \mathbb{P}(U \leq t \text{ et } X \leq t) \\ &= \mathbb{P}(U \leq t)\mathbb{P}(X \leq t)\end{aligned}$$

   par indépendance, donc (après calcul) $\mathbb{P}(\sup(U, X) \leq t) = t(1 - e^{-t})$.
   - Si $t > 1$, on a de même que pour $t \in [0, 1]$:

$$\mathbb{P}(\sup(U, X) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq t)\mathbb{P}(X \leq t) = 1 - e^{-t} \ .$$

   (b) En "dérivant" $\mathbb{P}(\sup(U, X) \leq t)$ par rapport à t, on trouve que la densité de $\sup(U, X)$ est $\mathbf{1}_{t\in[0,1]}(1 + (t - 1)e^{-t}) + \mathbf{1}_{t>1}e^{-t}$.

3. (a) À chaque pas de temps, la grenouille se déplace de 1 vers la droite (et de manière aléatoire vers le haut ou le bas) donc elle passe par l'axe des ordonnées (c'est à dire l'autoroute) au temps 25.

   (b) L'ordonnée de la grenouille au temps n peut s'écrire $V_1 + \cdots + V_n$ où $V_n = 1/\sqrt{2}$ avec probabilité $1/2$ et $V_n = -1/\sqrt{2}$ avec probabilité $1/2$ (pour tout k, V_k est la composante verticale du vecteur U_k). Les variables V_k sont d'espérance $m = 0$ et de variance $\sigma^2 = 1/2$. La probabilité de passer par un tunnel est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{ordonnée de } Z_{25} \in [-5, 5]) &= \mathbb{P}(|V_1 + \cdots + V_{25}| \leq 5) \\ &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{V_1 + \cdots + V_{25} - 25m}{\sigma\sqrt{25}}\right| \leq \sqrt{2}\right) \ .\end{aligned}$$

   Les variables V_i sont i.i.d., intégrables et de variance finie donc par le théorème central-limite : $\mathbb{P}(\text{ordonnée de } Z_{25} \in [-5, 5]) \approx \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = -1 + 2\int_{-\infty}^{\sqrt{2}} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$. On trouve sur la table jointe au sujet que $\mathbb{P}(\text{ordonnée de } Z_{25} \in [-5, 5]) \approx 0.84$.

   (c) On veut trouver x tel que $\mathbb{P}(\text{ordonnée de } Z_{25} \in [-x, x]) \approx 0.9$. On a par le théorme central-limite :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{ordonnée de } Z_{25} \in [-x, x]) &= \mathbb{P}(|V_1 + \cdots + V_{25}| \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{V_1 + \cdots + V_{25} - 25m}{\sigma\sqrt{25}}\right| \leq \frac{x}{5}\right) \\ &\approx \int_{-x\sqrt{2}/5}^{x\sqrt{2}/5} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \\ &= -1 + 2\int_{-\infty}^{x\sqrt{2}/5} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \ .\end{aligned}$$

   D'après la table, il faut $x\sqrt{2}/5 \approx 1.65$ donc $x \approx 5.83$. La grenouille se trouve toujours sur des points de coordonnées entières donc il suffit de prendre $x = 5$.

4. (a) On a par une récurrence immédiate :

$$\forall n \geq 1, W_n = \ln(W_0) + \ln(ap + (1-p)V_1) + \ln(p + (1-p)V_2) + \cdots + \ln(p + (1-p)V_n) \ .$$

Les variables $(\ln(ap + (1-p)V_k))_{k\geq 1}$ sont i.i.d. et intégrables donc par la loi forte des grands nombres : $\frac{\ln(ap+(1-p)V_1)+\cdots+\ln(p+(1-p)V_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}(\ln(ap + (1-p)V_1))$. Par ailleurs, $\frac{\ln(W_0)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\frac{\ln W_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}(\ln(ap + (1-p)V_1))$.

(b)
- Pour tout $p \in]0,1[$, la fonction $\omega \mapsto \ln(ap + (1-p)V_1(\omega))$ est intégrable.
- Pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $p \mapsto \ln(ap + (1-p)V_1(\omega))$ est dérivable sur $]0,1[$ et sa dérivée vaut $\frac{\partial \ln(ap+(1-p)V_1(\omega))}{\partial p} = \frac{a-V_1(\omega)}{ap+(1-p)V_1(\omega)}$.
- Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $p \in]0,1[$, $\left|\frac{\partial \ln(ap+(1-p)V_1(\omega))}{\partial p}\right| \leq 2 + \frac{V_1}{a} + \frac{a}{V_1}$. Par hypothèse, la variable $2 + \frac{V_1}{a} + \frac{a}{V_1}$ est intégrable.

Donc par le théorème de dérivation globale sous l'intégrale, on a que $c(p)$ est dérivable sur $]0,1[$ et que $c'(p) = \mathbb{E}\left(\frac{a-V_1}{ap+(1-p)V_1}\right)$.

(c) Si on admet que le théorème de dérivation globale s'applique à c' sur $[0,1]$, on obtient : $c''(p) = \mathbb{E}\left(-\frac{(a-V_1)^2}{(ap+(1-p)V_1))^2}\right)$.

(d) On calcule : $c'(0) = \mathbb{E}\,(a/V_1 - 1) > 0$, $c'(1) = \mathbb{E}(1 - V_1/a) < 0$. La fonction c' est continue sur $[0,1]$ et décroissante sur $[0,1]$ d'après la question précédente (car $c''(p) \leq 0, \forall p \in [0,1]$) donc elle s'annule une fois sur cet intervalle. On fait le tableau de variation de c et on trouve que c a un maximum en un point $p_0 \in]0,1[$.