UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2003-2004

Feuille d'exercices numéro 3
Fonctions mesurables, limites d'intégrales.

1. Soit μ une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (c'est à dire que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec $\mu(\mathbb{R}) = 1$). On note :

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) = \mu(]-\infty, x]). \end{array}$$

   F s'appelle la <u>fonction de répartition</u> de μ.

   (a) Montrer que en tout point x, F est continue à droite et a une limite à gauche (c'est à dire que $\forall x$, $\lim_{h\to 0^+} F(x+h) = F(x)$ et $\lim_{h\to 0^+} F(x-h)$ existe).
   (b) Quelles sont les limites de F en $+\infty$ et $-\infty$?
   (c) Montrer que F est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.
   (d) Supposons maintenant que μ a une densité f (par rapport à λ), exprimer F en fonction de f. Pour $f(x) = \mathbf{1}_{x>0} 2e^{-2x}$, calculer $F(1)$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ intégrable pour la mesure de Lebesgue. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (1-x^n) f(x)dx$.

3. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) dx$
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$
   (c) $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} dx$
   (d) $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1-\cos^{2n}(x)} e^{-|x|} dx$.
   (e) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x} dx$

4. On pose : $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathbf{1}_{x \le n}$. Montrer que $(f_n)_{n\ge 0}$ est une suite croissante de fonctions. (On pourra notamment étudier : $g(x) = (n+1)\ln\left(1 - \frac{x}{n+1}\right) - n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.)
   (b) En déduire la valeur de $I_n(\alpha)$ en fonction de α.

5. Soit μ la mesure de comptage ("Card") sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(N))$. Pour toute suite $(u_n)_{n\ge 0}$, on a : $\sum_{n\ge 0} u_n = \int_{\mathbb{N}} u_n d\mu$.

   (a) Calculer $\lim_{k\to+\infty} \left[\sum_{n\ge 0} \frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right)\right]$.
   (b) Calculer $\lim_{k\to+\infty} \left[\sum_{n\ge 0} \frac{\sin(n/k)}{2^n}\right]$.