

Feuille d'exercices numéro 5
Calculs d'espérances. Calculs de lois.

1. Soit X variable aléatoire réelle de loi de densité $\mathbf{1}_{x \geq 0} \lambda e^{-\lambda x} dx$, $\lambda > 0$ fixé (loi exponentielle de paramètre λ). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$. Calculer la loi de $2X$. Calculer $\mathbb{E}(2X)$, $\text{Var}(2X)$.
2. Soit X variable aléatoire réelle de loi de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma, m \in \mathbb{R}$ fixés (loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$. Calculer la loi de $Y = aX + b$ pour a et b réels. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\text{Var}(Y)$.
3. Soit X variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que $\forall k \geq 0, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!}$ ($\theta > 0$ fixé). Calculer $\mathbb{E}(X)$. Pour $u \geq 0$, calculer $\mathbb{E}(e^{-uX})$.
4. Soit (X, Y) variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^2 de loi de densité $\frac{1}{2} \exp(-|x+y| - |x-y|) dx dy$. Calculer la loi de $(X+Y, X-Y)$ puis les lois de X et Y . (On pourra utiliser un changement de variable approprié.)
5. Soit Y variable aléatoire réelle de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Montrer que $1/Y$ a même loi que Y .