UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2003-2004

Feuille d'exercices numéro 6
Indépendance et calculs de lois.

1. Soit (X, Y) variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ densité $\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1+(1+x^2)^2 y^2}$. Calculer la loi de X.

2. Soit (X, Y) variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité $\frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} e^{-y^2/2}$. Calculer la loi de X/Y. Cette variable est-elle intégrable ?

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.

4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et que Y suit une loi de Poisson de paramètre μ. Calculer la loi de $X+Y$.

5. Plus difficile :
   X une variable aléatoire dans $\mathbb{R}$ est dite symétrique si $-X$ a même loi que X.

   (a) Si X a une densité f, montrer que : X est symétrique <u>si et seulement si</u> $f(x) = f(-x)$ pour presque tout x.

   (b) Donner un exemple de de loi symétrique.

   (c) Montrer que X est symétrique <u>si et seulement si</u> le nombre $\mathbb{E}(e^{iuX})$ est réel $\forall u \in \mathbb{R}$.

   (d) Soit X variable aléatoire dans $\mathbb{R}$ symétrique. On suppose $\mathbb{P}(X=0)=0$. On note :

   $$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{si } X = 0 \\ -1 & \text{si } X < 0 \ . \end{cases}$$

   Montrer que ϵ et X sont indépendantes.

   (e) Si Y et Y' sont deux variables aléatoires réelles de même loi et indépendantes, montrer que $Y - Y'$ est symétrique.