UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2003-2004

Feuille d'exercices numéro 8
Variables aléatoires, lemme de Borel-Cantelli, loi des grands nombres.

1. René et Marcel ont rendez-vous au café du port. Ils sont supposés arriver tous les deux entre 17h et 18h. Ils ont dit tous les deux qu'ils n'attendront pas plus de 10 minutes.
   (a) Supposons que René décide d'arriver à un instant précis $x \in [5,6]$ et que Marcel arrive à un instant aléatoire Y de loi uniforme sur $[5,6]$ indépendant de x. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ? Quelle plage horaire doit choisir René pour maximiser cette probabilité ? Supposons que René arrive à 17h15. Soit U le temps qu'il passe à attendre Marcel. Calculer $\mathbb{E}(U)$.
   (b) Supposons que René et Marcel arrivent à des instants X et Y indépendants de loi uniforme sur $[5,6]$. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ? Si on note V le temps que René passe à attendre Marcel, calculer $\mathbb{E}(V)$.

2. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_1 = 1) &= p\\ \mathbb{P}(Y_1 = -1) &= 1-p\end{aligned}$$
où $p \in [0,1] \setminus \{1/2\}$. On pose $Z_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$, $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. On note A_n l'événement $\{Z_n = 0\}$.
   (a) Soit la fonction :
$$\begin{aligned} f : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R}\\ x &\mapsto 4x(1-x)\ . \end{aligned}$$
   Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$ et que si $x \neq 1/2$ alors $f(x) < 1$.
   (b) Soit n un entier impair. Montrer que $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 0$.
   (c) Soit n un entier pair, $n = 2k$. Montrer que $\mathbb{P}(Z_n = 0) = C_{2k}^k p^k (1-p)^k$.
   (d) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$: $C_{2k}^k \leq 4^k$.
   (e) En déduire que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Quelle est $\mathbb{P}(\{\omega : \omega \in$ une infinité de $A_n\})$?

3. On utilise des ampoules successivement sur une même lampe. On note $X_1, X_2, \ldots$ les durées de vie (en jours) de ces ampoules. On suppose que les X_i sont indépendantes et de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On voudrait estimer à t fixé la quantité $\mathbb{P}(X_1 \geq t)$ (qui vaut $e^{-\lambda t}$) et pour cela il faut estimer λ. Soit : $\widehat{\lambda}_n = \frac{n}{X_1 + \cdots + X_n}$. Montrer que $\widehat{\lambda}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \lambda$.