

Feuille d'exercices numéro 9
Théorème central-limite. Espérance conditionnelle.

1. Soit X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Soient $t_1, t_2 > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X > t_1 + t_2 | X > t_1) = \mathbb{P}(X > t_2)$.
2. On achète un stock d'ampoules pour un lampadaire. Les ampoules ont une durée de vie de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. La première ampoule dure un temps X_1 , on la remplace immédiatement et la deuxième qui dure un temps $X_2 \dots$ Soit $T > 0$. On admet que le nombre d'ampoules N consommées pendant le temps T est tel que $N - 1$ est de loi $\mathcal{P}(\lambda T)$.
 - (a) Calculer $m = \mathbb{E}(N)$.
 - (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{P}(N \geq m + p) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{m-1+p} < T)$.
 - (c) On suppose maintenant que $\lambda = 1$, $T = 20$, $p = 5$. Donner une valeur numérique approchée de $\mathbb{P}(N \geq m + p)$ à l'aide de la table jointe.
 - (d) Avec les mêmes valeurs numériques que ci-dessus, combien d'ampoules faut-il acheter au minimum pour que $\mathbb{P}(\text{se retrouver à court d'ampoules avant le temps } T) < 0.05$?
3. Soit $p \in [0, 1]$. Soit A_0 le carré $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. L'ensemble A_1 est un ensemble aléatoire construit de la manière suivante : on découpe A_0 en 9 carrés, chaque petit carré appartient à A_1 avec probabilité p (indépendamment des autres). On recommence l'opération sur les carrés de A_1 pour former A_2 (de manière indépendante de ce qui s'est passé avant) et ainsi de suite, on obtient des ensembles A_1, A_2, A_3, \dots . Si $A_n = \emptyset$ alors $\forall k \geq n, A_k = \emptyset$. La figure ci-dessous représente une réalisation de A_1 et A_2 (coloriés en noir) pour une certaine valeur de p .



- (a) Pour tout n , on note Z_n le nombre de carrés de côté $1/3^n$ formant A_n . Soit $n \geq 1$, montrer que $\forall r \in [0, 1], g_{Z_n}(r) = g_{Z_{n-1}}(f(r))$ où $\forall r \in [0, 1], f(r) = (pr + 1 - p)^9$.
- (b) En déduire que $g_{Z_n}(r) = f^{\circ n}(r)$ ("on" veut dire que l'on compose n fois).
- (c) Montrer que f est convexe (c'est à dire que sa dérivée est une fonction croissante).
- (d) Calculer $f(0), f(1), f'(1)$. Faire un dessin de f .
- (e) On suppose que $p \leq 1/9$.
 - i. Montrer que $\forall r \in [0, 1], g_{Z_n}(r) \rightarrow 1$.
 - ii. En déduire que $\mathbb{P}(Z_n = 0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.
 - iii. En déduire que $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0$. (On pourra considérer l'événement $\{\omega : Z_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0\}$ comme une réunion croissante d'événements.)
- (f) Pour tout n , soit Y_n l'aire de A_n . Montrer en utilisant les espérances conditionnelles que $\mathbb{E}(Y_n) = p^n$. En déduire que $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0$.