UNIVERSITÉ NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
L4 - 2003-2004

Feuille d'exercices semaine 1

1. Rappel : Si $f : E \to F$ et $A \subset F$, $f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\}$. Si $C \subset E$, $f(C) = \{f(x), x \in C\}$.
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.
   (a) Déterminer $f([-3,-1])$, $f([-3,1])$, $f(]-3,1])$.
   (b) Déterminer $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}(]1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-1,0] \cup [1,2[)$
2. On considère des applications $f : E \to F$, $g : F \to G$.
   (a) Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
   (b) Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
   (c) Montrer que $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$.
   (d) Pour $U \subset G$, montrer que $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.
3. Rappel : Pour une famille d'ensemble $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on note $\bigcap_{n \geq 0} A_n = \{x : \forall n, x \in A_n\}$ et $\bigcup_{n \geq 0} A_n = \{x : \exists n \text{ tel que } x \in A_n\}$
   (a) Déterminer $\bigcap_{n \geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)]$.
   (b) Déterminer $\bigcap_{n \geq 0}]1, 2 + 1/(n+1)]$.
   (c) Déterminer $\bigcap_{n \geq 0}]1 - 1/(n+1), 2]$.
   (d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Déterminer $f^{-1}(\bigcup_{n \geq 0} [1/(n+1), +\infty[)$.
4. Rappel : $I \subset \mathbb{R}$ est dit un intervalle si $[a \in I \text{ et } b \in I \Rightarrow \forall x, a \leq x \leq b, x \in I]$.
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est monotone, montrer que pour tout intervalle I, $f^{-1}(I)$ est un intervalle.
5. On considère une application $f : E \to F_1 \times F_2$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$. Montrer que $f^{-1}(A \times B) = f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B)$.
6. (a) Montrer que $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.
   (b) Montrer que $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$. Montrer par un contre-exemple que l'inclusion inverse n'est pas toujours vraie.
   (c) Les inclusions suivantes sont-elles vraies : $f(D^c) \subset f(D)^c$, $f(D)^c \subset f(D^c)$? On exhibera au besoin des contre-exemples.
7. Rappel : Si $f : E \to F$, f est dite injective si $[f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$. f est dite surjective si quelque soit $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
On considère les deux applications f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(n) = 2n$ et
$$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$
   (a) Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.
   (b) Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.