**UNIVERSITÉ NICE - SOPHIA ANTIPOLIS**
**Licence de mathématiques - Probabilités (L4) - 2003-2004**

**Feuille d'exercices semaine 2**

1. Soit Card : $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,+\infty]$, $A \mapsto \mathrm{Card}(A) =$ le nombre d'éléments de $A$. Montrer que Card est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

2. On se donne un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.

   (a) Soit $x \in E$, on note

   $$\begin{array}{rcl} \delta_x : \mathcal{A} & \to & [0,+\infty] \\ B & \mapsto & \delta_x(B) \begin{cases} = 1 & \text{si } x \in B \\ = 0 & \text{sinon .} \end{cases} \end{array}$$

   Montrer que $\delta_x$ est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

   (b) Soient $x_1, ..., x_k$ des éléments distincts de $E$ et $p_1, ..., p_k \in \mathbb{R}_+^*$. On note

   $$\begin{array}{rcl} \mu : \mathcal{A} & \to & [0,+\infty] \\ B & \mapsto & \mu(B) = \displaystyle\sum_{1 \le i \le k} p_i \delta_{x_i}(B) \end{array}$$

   Montrer que $\mu$ est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

3. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un ensemble mesuré avec $\mu$ une mesure finie.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \{x : \mu(\{x\}) > 1/n\}$. Montrer que $A_n$ est fini pour tout $n$.

   (b) Soit $A = \{x : \mu(\{x\}) > 0\}$. Montrer que $A = \bigcup_{n \ge 1} A_n$.

   (c) Montrer que $A$ est dénombrable.

4. Soit un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$. Soit $f : E \to F$. Montrer que $\{B : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur $F$.

5. Soit $A_1, ..., A_n$ une partition de $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i \in I} A_i : I \subset \{1, ..., n\}\}$ est une tribu.

   (b) Montrer que $\sigma(\{A_1, ..., A_n\}) = \mathcal{A}$.

6. Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A$ est dénombrable ou $A^c$ est dénombrable $\}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une tribu.

   (b) Montrer que si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est dénombrable alors $A \in \sigma(\{x\}, x \in \mathbb{R})$. En déduire que $\mathcal{B} \subset \sigma(\{x\}, x \in \mathbb{R})$.

   (c) Montrer que $\mathcal{B} = \sigma(\{x\}, x \in \mathbb{R})$.

7. Trouver un ouvert de $\mathbb{R}$ qui est de mesure de Lebesgue finie et qui n'est pas borné.