UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence de mathématiques - Intégration et Probabilités (L2/L4) - 2003-2004

Feuille d'exercices semaine 3
Fonctions mesurables, intégration, convergence monotone

1. Soit μ une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note :

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) = \mu(]-\infty, x]). \end{array}$$

   F s'appelle la fonction de répartition de μ.

   (a) Montrer que en tout point x, f est continue à droite et a une limite à gauche.

   (b) Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?

   (c) Montrer que F est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ intégrable pour la mesure de Lebesgue. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (1-x^n) f(x)dx$.

3. On pose : $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathbf{1}_{x\leq n}$. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions. (On pourra notamment étudier : $g(x) = (n+1)\ln\left(1 - \frac{x}{n+1}\right) - n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.)

   (b) En déduire la valeur de $I_n(\alpha)$ en fonction de α.

4. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

   (a) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que le suite f_n converge simplement vers f. Montrer que s'il existe n_0 tel que f_{n_0} soit intégrable alors $\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)d\mu(x) = \int_E f(x)d\mu(x)$.

   (b) En déduire : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-n\sqrt{x}} dx$.

   (c) Le résultat du (a) est-il encore vrai si aucun des f_n n'est intégrable ?

5. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, positive.

   (a) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f bornée sur A.

   (b) On suppose que $\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) > 0$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ et $A \in \mathcal{A}$ tels que $\mu(A) > 0$ et $\forall x \in A$, $f(x) > \epsilon$.

6. Inégalité de Jensen.
   Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) = 1$. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ convexe et dérivable. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) = 1$. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$ mesurable et telle que $\int_E f(x)d\mu(x) < +\infty$.

   (a) Montrer que $\forall z, y \in I$, $\phi(y) \geq \phi(z) + \phi'(z)(y - z)$

   (b) En prenant $z = \int_E f(x)d\mu(x)$ et $y = f(x)$ dans l'inegalité précédente, montrer que :

$$\phi\left(\int_E f(x)d\mu(x)\right) \leq \int_E \phi \circ f(x)d\mu(x).$$

   (c) En déduire que pour toute fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 |f(x)|dx < +\infty$:

$$\left(\int_0^1 |f(x)|dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

7. (a) Montrer que $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : x \in A \Rightarrow -x \in A\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si f est paire.

8. Lemme de Borel-Cantelli et application.
   Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est une probabilité.

   (a) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
      i. $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n) < \infty$
      ii. $\mu(\{x : x \text{ appartient à une infinité de } A_n\}) < \infty$.

   (b) On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ de E dans $\mathbb{R}^+$ converge en mesure pour μ vers f (fonction de E dans $\mathbb{R}^+$) si :

$$\forall \epsilon > 0, \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \to 0.$$

   Montrer que si $(f_n)_n \geq 0$ converge en mesure pour μ vers f alors il existe une sous-suite qui converge simplement μ-presque sûrement, c'est à dire qu'il existe des indices $n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ tels que $\mu(\{x : f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)\}) = 1$.