UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence de mathématiques - Intégration et Probabilités (L4) - 2003-2004

Feuille d'exercices semaine 6
Calculs de lois et d'espérances

1. (a) Soit X variable aléatoire réelle de loi de densité $\mathbf{1}_{x\geq 0}\lambda e^{-\lambda x}dx$, $\lambda > 0$ fixé (loi exponentielle de paramètre λ). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$. Calculer la loi de $2X$. Calculer $\mathbb{E}(2X)$, $\mathrm{Var}(2X)$.

   (b) Soit X variable aléatoire réelle de loi de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$, $\sigma, m \in \mathbb{R}$ fixés (loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$. Calculer la loi de $Y = aX + b$ pour a et b réels. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

   (c) Soit X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall k \geq 0, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\theta^k e^{-k}}{k!}$ ($\theta > 0$ fixé). Calculer $\mathbb{E}(X)$. Pour $u \geq 0$, calculer $\mathbb{E}(e^{-uX})$.

2. Soit (X,Y) variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi de densité $\frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{x^2+y^2\leq 1}dxdy$. Donner la loi de X.

3. Soit (X,Y) variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi de densité $\frac{1}{2}\exp\left(-|x+y|-|x-y|\right)dxdy$. Calculer la loi de $(X+Y, X-Y)$ puis les lois de X et Y. (On pourra utiliser un changement de variable approprié.)

4. Soit (X,Y) variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi de densité $\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}dxdy$ ($\sigma_1, \sigma_2 > 0$). Calculer la loi de $X+Y$.

5. Soit (X,Y) variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi de densité $\frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}$. Calculer la loi de X/Y. Cette variable est-elle intégrable ?

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de loi de densité $\mathbf{1}_{x_1\geq 0}e^{-x_1}\mathbf{1}_{x_2\geq 0}e^{-x_2}\dots\mathbf{1}_{x_n\geq 0}e^{-x_n}dx_1\dots dx_n$.

   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \geq 0$:
   $\int_{\mathbb{R}^k}\mathbf{1}_{x_1\geq 0}\mathbf{1}_{x_2\geq 0}\dots\mathbf{1}_{x_k\geq 0}\times\mathbf{1}_{x_1+\dots+x_k\leq x}dx_1dx_2\dots dx_k = \frac{x^k}{k!}$.

   (b) Montrer que $\forall x \geq 0$, $\mathbb{P}(X_1+\dots+X_n \leq x) = 1 - e^{-x}\left(1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)$.

   (c) En déduire que $X_1+\dots+X_n$ a une loi de densité $\mathbf{1}_{x\geq 0}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}dx$.

7. On se donne X et Y variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la fonction suivante : pour $t \in [0,1]$, $g_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k\mathbb{P}(X = k)$.

   (a) Montrer que g_X est C^∞ sur $[0,1[$.

   (b) Montrer que X a même loi que Y si et seulement si $g_X = g_Y$. (On remarquera que $\forall k \geq 0$, $\mathbb{P}(X = k) = g_X^{(k)}(0)/k!$.)

   (c) Montrer que si X est intégrable alors g_X est dérivable à droite en 1 et $g'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.

   (d) Montrer que si g_X est dérivable à droite en 1 alors X est intégrable et $\mathbb{E}(X) = g'_X(1)$.

   (e) Soit $0 < p < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X variable aléatoire telle que pour $0 \leq k \leq n$, $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$. Calculer g_X. Calculer $\mathbb{E}(X)$.