UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence de mathématiques - Intégration et Probabilités (L4) - 2003-2004

Feuille d'exercices numéro 9
Loi des grands nombres

1. Soient $X_1, X_2 \dots$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{P}(\theta)$ (rappel : X_n prend ses valeurs dans $0, 1, 2, \dots$ et $\mathbb{P}(X_n = k) = \theta^k e^{-\theta}/k!$). On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et on rappelle que $S_n \sim \mathcal{P}(n\theta)$.

   (a) Soit f continue de $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$, bornée. Montrer que :
   $$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{e^{-n\theta}(n\theta)^k}{k!} \ .$$

   (b) En déduire que :
   $$\sum_{k=0}^{\infty} f(kn) \frac{e^{-n\theta}(n\theta)^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\theta) \ .$$

2. Soient $X_1, X_2, \dots, Y_1, Y_2, \dots$ des variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes.

   (a) Montrer que :
   $$\frac{\mathbf{1}_{X_1^2+Y_1^2\leq 1} + \cdots + \mathbf{1}_{X_n^2+Y_n^2\leq 1}}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \frac{\pi}{4} \ .$$

   (b) En déduire une méthode d'approximation de π.

3. Soit f une fonction mesurable : $[0, 1] \to [0, 1]$. Soient $X_1, X_2, \dots, Y_1, Y_2, \dots$ des variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{1}_{Y_1\leq f(X_1)} + \cdots + \mathbf{1}_{Y_n\leq f(X_n)}}{n} \ .$$

4. On utilise des ampoules successivement sur une même lampe. On note $X_1, X_2, ...$ les durées de vie (en jours) de ces ampoules. On suppose que les X_i sont indépendantes et de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ (rappel : cela veut dire que X_i de loi $\mathbf{1}_{x\geq 0}\lambda e^{-\lambda x}dx$). On voudrait estimer $\mathbb{P}(X_1 \geq t) = e^{-\lambda t}$ et pour cela il faut estimer λ. Soit : $\widehat{\lambda}_n = \frac{n}{X_1+\cdots+X_n}$. Montrer que $\widehat{\lambda}_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \lambda$.

5. On utilise des ampoules successivement sur une même lampe. On note $X_1, X_2, ...$ les durées de vie (en jours) de ces ampoules et $Y_1, Y_2, ...$ le temps qu'il faut attendre entre la mort d'une ampoule et son remplacement. Par convention, on note $X_0 = 0$ et $Y_0 = 0$. Ainsi, la première ampoule fonctionne pendant une durée X_1, il se passe un temps Y_1 avant qu'on la remplace par la deuxième ampoule qui fonctionne un temps $X_2 \dots$

   On s'intéresse à R_t la durée pendant laquelle on a eu une ampoule qui fonctionne dans l'intervalle $[0, t]$ ($t \geq 0$). Par exemple, si $X_1 = 2, Y_1 = 1, X_2 = 3$ et $t = 4$ alors $R_t = 3$. On suppose que $\mathbb{E}(X_1) < \infty$, $\mathbb{E}(Y_1) < \infty$. On note $Z_n = X_n + Y_n$. On pose $i(t) = \sup\{i \geq 0 : Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_i \leq t\}$. Dans l'exemple précédent, on a $i(t) = 1$.

(a) Montrer que $i(t)$ est une fonction croissante.

(b) Montrer que $\{\omega : \sup_{t\geq 0} i(t) < \infty\} = \{\omega : \exists n, Z_n = \infty\}$.

(c) En déduire que $i(t) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} +\infty$.

(d) Montrer que pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{array}{rcl} Z_0 + \cdots + Z_{i(t)} \leq & t & \leq Z_0 + \cdots + Z_{i(t)} + Z_{i(t)+1} \\ X_0 + \cdots + X_{i(t)} \leq & R_t & \leq X_0 + \cdots + X_{i(t)} + X_{i(t)+1} \ . \end{array}$$

En déduire un encadrement de R_t/t.

(e) En déduire que

$$\frac{R_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(Y_1)} \ .$$