UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
Master 2 MASS - Probabilités numériques - 2005-2006 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
`http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Devoir maison numéro 2
À rendre pour le vendredi 17 décembre.

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire prenant ses valeurs dans E^n, E étant un ensemble fini. On notera $p(x_1, \dots, x_n)$ sa loi. On suppose que $p(\bar{x}) > 0, \forall \bar{x} \in E^n$. On définit pour tout $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ des variables aléatoires $Y_i^{\bar{x}}$ $(1 \leq i \leq n)$ de loi

$$\mathcal{L}(X_i | X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_m)$$

(la loi conditionnelle de X_i sachant que $X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_m$). On remarque que la loi de $Y_i^{\bar{x}}$ ne dépend pas de x_i. On a :

$$\mathbb{P}(Y_i^{\bar{x}} = \alpha) = \frac{p(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\sum_{z \in E} p(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n)} \ .$$

On suppose que l'on sait simuler suivant la loi de $Y_i^{\bar{x}}$ $(\forall \bar{x}, \forall i)$. On considère la chaîne de Markov $(\bar{X}^k)_{k \geq 0}$ dans E^n dont la transition est décrite de la façon suivante : si $\bar{X}^k = \bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$,

- on commence par tirer uniformément un indice i entre 1 et n
- puis on tire une variable Z suivant la loi de $Y_i^{\bar{x}}$ (indépendamment de tout le reste)
- puis on pose $\bar{X}^{k+1} = (x_1, \dots, x_{i-1}, Z, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

1. Montrer que la probabilité de transition de la chaîne ainsi définie est donnée par, si $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\bar{y} = (x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$:

$$q(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(X_i = y_i | X_j = x_j, j \neq i) \ ,$$

   et que si au moins deux coordonnées de $\bar{y}$ ne coïncident pas avec celles de $\bar{x}$ alors $q(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

2. On cherche à simuler suivant la loi :

$$\pi(\bar{x}) = \frac{p(\bar{x}) \mathbf{1}_{\{\bar{x} \in A\}}}{p(A)}$$

   pour $A \subset E^n$ quelconque. Décrire un algorithme de Métropolis-Hastings qui permet de construire une chaîne de Markov de probabilité invariante π (on ne demande pas de justifier pourquoi on arrive effectivement à simuler suivant π).

3. Que devient cet algorithme si $A = E^n$?

4. On distribue 10 pions sur un échiquier indépendamment les uns des autres et chacun avec la loi uniforme. On cherche à simuler cette distibution conditionnellement au fait que deux pions ne se retrouvent pas dans des cases adjacentes (deux cases sont dites adjacentes si elles on un côté en commun), ni l'un sur l'autre. En se servant des questions précédentes, écrire un programme utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings permettant de simuler une chaîne de Markov de probabilité invariante cette loi conditionnelle (c'est à dire que l'on simulera un chaîne de loi invariante la loi voulue jusqu'à un temps arbitraire, par exemple 50). Ce programme dessinera une réalisation du placement des pions.

   Remarque : Vous rendrez un programme opérationnel, il ne sera pas tenu compte des programmes qui ne tournent pas.