UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2005-2006
Sylvain Rubenthaler

Corrigé de l'examen du 10/1/06
Durée : 3h.

Exercice 1

(a) On a $\forall q$, $C \subset B_q$ donc $\mathbb{P}(C) \leq \mathbb{P}(B_q) \leq \sum_{k\geq q} \mathbb{P}(A_k)$. Par hypothèse, $\lim_{q\to+\infty} \sum_{k\geq q} \mathbb{P}(A_k) = 0$ donc $\mathbb{P}(C) = 0$.

(b) i. On a $B_n^c = \cap_{n\leq k} A_k^c \subset \cap_{n\leq k\leq q} A_k^c$.
ii. On a donc (en utilisant l'indépendance) $\mathbb{P}(B_n) \leq \mathbb{P}(\cap_{n\leq k\leq q} A_k^c) = \Pi_{n\leq k\leq q}\mathbb{P}(A_k^c)$.
iii. On a $\mathbb{P}(B_n) \leq \Pi_{n\leq k\leq q}(1-\mathbb{P}(A_k)) \leq \Pi_{n\leq k\leq q} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = \exp\left(-\sum_{n\leq k\leq q}\mathbb{P}(A_k)\right)$.
iv. On a donc, vu l'hypothèse sur la divergence de la série, $\mathbb{P}(B_n^c) = 0$.
v. On a $C^c = \cup_{n\geq 0} B_n^c$ donc $\mathbb{P}(C^c) \leq \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(B_n^c) = 0$.

Exercice 2

(a) On a $\phi(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ux}\sqrt{(2/\pi)}e^{-x^2/2}dx$.
Pour tout $u > -1$, $x \mapsto e^{-ux}\sqrt{(2/\pi)}e^{-x^2/2}$ est mesurable (car continue).
Pour tout $u > -1$, pour tout $x \geq 0$, $|e^{-ux}\sqrt{(2/\pi)}e^{-x^2/2}| \leq e^{x}\sqrt{(2/\pi)}e^{-x^2/2}|$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Pour tout $x \geq 0$, $u \mapsto e^{-ux}\sqrt{(2/\pi)}e^{-x^2/2}$ est continue.
Donc par théorème de continuité sous l'intégrale, ϕ est continue.

(b) On a pour tous $n \geq 0$ et $x \geq 0$, $|e^{-nx}\sqrt{(2/\pi)}e^{-x^2/2}| \leq \sqrt{(2/\pi)}e^{-x^2/2}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x > 0$ (donc pour presque tout x de $[0,+\infty[$), $e^{-nx}\sqrt{(2/\pi)}e^{-x^2/2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par théorème de convergence domineée, $\phi(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(c) Pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, on a :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(h(Y)) & = & \mathbb{E}(h(e^{-X})) \\
& = & \displaystyle\int_0^{+\infty} h(e^{-x})\sqrt{(2/\pi)}e^{-x^2/2}dx \\
\text{(changement de variable } e^{-x} = t) & = & \displaystyle\int_1^0 h(t)\sqrt{(2/\pi)}\frac{e^{-\log(t)^2/2}}{-t}dt \ .
\end{array}$$

Donc la densité de Y est $t \mapsto \mathbf{1}_{t\in[0,1]}\sqrt{(2/\pi)}\frac{e^{-\log(t)^2/2}}{t}$.

Exercice 3

(a)

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n \geq n(\mathbb{E}(X_1)+m)) & = & \mathbb{P}\left(\dfrac{X_1+\cdots+X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}m\right) \\
\text{(théorème central-limite)} & \approx & \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi}}dt \\
\text{(d'après la table)} & \approx & 0.1587\ .
\end{array}$$

(b) Pour tout n "assez grand" :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq n(\mathbb{E}(X_1) + m)) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} m \right) \\
\text{(théorème central-limite)} &\approx \int_{0.1\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi}} dt \ .
\end{aligned}$$

D'après la table. il suffit donc d'avoir $0.1\sqrt{n} \geq 1.65$, ce qui est satisfait pour $n \geq 17^2 = 289$.