UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2005-2006
Sylvain Rubenthaler

Examen - 10/1/05

Durée : 3h.

Documents et calculatrices interdits.

La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace mesuré. Soient $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{F}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$. On remarque que pour tout n, $B_{n+1} \subset B_n$. On note $C = \cap_{n\geq 0} B_n$.

(a) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ (rappel : ceci implique que $\lim_{q\to+\infty} \sum_{k\geq q} \mathbb{P}(A_k) = 0$) alors $\mathbb{P}(C) = 0$. Indication : on remarquera que $\forall q$, $\cap_{n\geq 0} B_n \subset B_q$.

(b) On suppose désormais que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ (rappel : ceci implique que $\forall n$ $\lim_{q\to+\infty} \sum_{n\leq k\leq q} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$) et que les A_n sont indépendants (et donc les A_n^c sont aussi indépendants).

i. Montrer que pour tous q, n tels que $n \leq q$, $B_n^c \subset \cap_{n\leq k\leq q} A_k^c$.

ii. Montrer que pour tous q, n tels que $n \leq q$, $\mathbb{P}(B_n^c) \leq \Pi_{n\leq k\leq q} \mathbb{P}(A_k^c)$.

iii. En utilisant l'inégalité $\forall x \in [0,1], (1-x) \leq e^{-x}$, montrer que pour tous q, n tels que $n \leq q$,

$$\mathbb{P}(B_n^c) \leq \exp\left(- \sum_{n\leq k\leq q} \mathbb{P}(A_k) \right) .$$

iv. Montrer que $\forall n$, $\mathbb{P}(B_n^c) = 0$.

v. Montrer que $\mathbb{P}(C^c) = 0$.

Exercice 2

Soit X variable aléatoire réelle de densité $\sqrt{(2/\pi)} e^{-x^2/2} \mathbf{1}_{x\geq 0}$.

(a) Soit $\phi : u \in]-1, +\infty[\mapsto \phi(u) = \mathbb{E}(e^{-uX})$. Écrire $\phi(u)$ sous forme d'une intégrale sur $\mathbb{R}$ et montrer que ϕ est continue.

(b) Donner la limite de $\phi(n)$ quand n entier positif tend vers l'infini.

(c) Donner la densité de la variable aléatoire $Y = e^{-X}$.

Exercice 3

Un assureur assure n automobilistes (numéroté de 1 à n) contre les accidents. Les assurés versent une prime le 1er janvier. Au cours de l'année, l'assureur devra verser la somme X_i à l'assuré numéro i. Les X_i sont supposées être des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La prime versée par chaque assuré est $\mathbb{E}(X_1) + m$ $(m \in \mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{Var}(X_1) = 1$.

(a) Estimer la probabilité

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq n(\mathbb{E}(X_1) + m))$$

pour $n = 100$ et $m = 0.1$ (c'est la probabilité que l'assureur fasse faillite).

(b) On suppose toujours que $m = 0.1$, trouver un entier n' tel que si $n \geq n'$, $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq n(\mathbb{E}(X_1) + m)) \leq 0.05$.