

Feuille d'exercices numéro 2

1. Couplage.

On suppose que l'on a un noyau de Markov irréductible  $Q$  sur un espace  $E$  dénombrable. On admet les points 1 à 3 du théorème ergodique et on veut démontrer le point 4 sous l'hypothèse suivante : il existe une probabilité  $\lambda$  sur  $E$  et  $\epsilon > 0$  tels que  $\forall x, y \in E$ ,

$$\epsilon\lambda(y) \leq Q(x, y) .$$

On construit deux chaînes de Markov  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  par :

- On tire  $X_0$  suivant  $\pi$  et  $Y_0$  (indépendamment de  $X_0$ ) suivant  $\pi'_0$ .
- Si on a tiré  $X_0, \dots, X_n$  et  $Y_0, \dots, Y_n$ , on tire  $U_n \sim \mathcal{U}([0, 1])$  indépendamment de toutes les autres variables.
  - Si  $U_n \leq \epsilon$ , on tire  $X_{n+1} = Y_{n+1}$  suivant  $\lambda$ .
  - Sinon
    - \* Si  $X_n = Y_n$ , on tire  $X_{n+1} = Y_{n+1}$  suivant la loi  $\frac{1}{1-\epsilon}(Q(X_n, \cdot) - \epsilon\lambda(\cdot))$  (c'est bien une loi de probabilité).
    - \* Sinon on tire  $X_{n+1}$  et  $Y_{n+1}$  indépendamment suivant la loi  $\frac{1}{1-\epsilon}(Q(X_n, \cdot) - \epsilon\lambda(\cdot))$ .

- (a) Montrer que  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  sont des chaînes de Markov de transition  $Q$ .
- (b) Montrer que pour presque tout  $\omega$ ,  $\exists n$  tel que  $X_n(\omega) = Y_n(\omega)$ .
- (c) Montrer le point 4 du théorème.

2. Soient  $p$  et  $q$  des probabilités sur  $E$  (toujours dénombrable) avec  $\forall x, 0 < p(x) \leq cq(x)$  (par abus de notation  $p(x) = p(\{x\})$ ) où  $c$  constante  $> 0$ . On prend des variables  $Y_n$  i.i.d. de loi  $q$ , indépendantes de  $X_0$ . On définit par récurrence une chaîne  $(X_n)$  :

- On tire  $X_0$  suivant  $q$ .
- Quand on a  $X_n$ , on tire  $U_n \sim \mathcal{U}([0, 1])$  indépendamment de toutes les autres variables et :

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_{n+1} & \text{si } U_n \leq \frac{p(Y_{n+1})}{cq(Y_{n+1})} \\ X_n & \text{sinon} . \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $(X_n)$  est une chaîne de Markov.
- (b) Calculer la probabilité de transition  $P(x, y)$  de  $(X_n)$ .
- (c) Calculer  $\mu P$  pour une probabilité  $\mu$ . En déduire que la loi de  $X_n$  converge vers une unique probabilité invariante égale à  $p$ .
- (d) Quel rapport y-a-t-il entre cette chaîne et une méthode de rejet classique ?

3. On se place sur  $E = \mathbb{Z}$ . Soit  $q$  loi sur  $E$  telle que  $q(x) = q(-x)$ . Soit  $p$  une loi telle que  $p(x) > 0, \forall x$ . On définit une chaîne de Markov  $(X_n)$  par :

- $X_0 \sim p$

- On tire  $U_n \sim \mathcal{U}([0, 1])$  indépendante de toutes les autres variables et  $Z_n$  de loi  $q$  indépendante de toutes les autres variables. On pose  $Y_n = X_n + Z_n$  et :

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_n & \text{si } U_n \leq \inf \left( 1, \frac{p(Y_n)}{p(X_n)} \right) \\ X_n & \text{sinon} \quad . \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $(X_n)$  est une chaîne réversible.
- (b) Soit  $\pi(x) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H(x))$  une loi sur  $E$  (où  $H$  est une fonction,  $\beta$  une constante quelconque et  $Z$  est la constante de normalisation). Comment approcher  $\int_E f(x)\pi(dx)$  à l'aide d'un algorithme de Métropolis (sans même savoir calculer  $Z$ ) ?