UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2005-2006 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
`http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 1

1. (a) $f([-3,-1]) = [1,9]$, $f([-3,1]) = [0,9]$, $f(]-3,1]) = [0,9[$.
   (b) $f^{-1}(]-\infty,2]) = [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, $f^{-1}(]1,+\infty[) =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $f^{-1}(]-1,0]\cup[1,2[) = \{0\}\cup]-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}[$.

2. (a) $\frac{\sin(x)}{\log(1+x)} \underset{x\to 0+}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} 1$
   (b) $\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^{x\log\left(1+\frac{2}{x}\right)}$ et $x\log\left(1+\frac{2}{x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$ donc par continuité de la fonction exp : $\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \underset{x\to}{\longrightarrow} e^2$
   (c) $\frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)} = \frac{(x^2/2)+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1$
   (d) $\frac{1-(1+x)^\alpha}{1-(1+x)^\beta} = \frac{\alpha x+o(x)}{\beta x+o(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$

   (a) on intgre par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx &= [-x^2e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}dx \\ &= 0 + [-2xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-x}dx \\ &= [-2e^{-x}]_0^{+\infty} = 2\end{aligned}$$

   (b) changement de variable : $t = \log(z)$, $z = e^t$, $dz = e^t dt$

$$\begin{aligned}\int_{e^1}^{+\infty} \frac{1}{(\log(z))^2 z}dz &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt \\ &= [-1/t]_1^{+\infty} = 1\end{aligned}$$

   (c) on décompose $\frac{1}{(2-x)(1+x)} = \frac{1/3}{2-x} + \frac{1/3}{1+x}$ (toujours possible pour une fraction rationelle à pôles simples) et donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-x)(1+x)}dx = \left[-\frac{1}{3}\log(2-x) + \frac{1}{3}\log(1+x)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\log(4)$$

   (d) changement de variable : $t = \tan(x)$, $x = \arctan(t)$, $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}dx &= \int_0^{\pi/4} 1+\tan^2(x)dx \\ &= \int_0^1 dt = 1\end{aligned}$$

3. (a) $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2}\sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$.

(b) On intègre par parties pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(x)\sin(x)dx \\ &= [-\sin^{n+1}(x)\cos(x)]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\cos^2(x)dx \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

d'où $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

(c) Démonstration par récurrence de la formule pour I_{2p} (démonstration similaire pour I_{2p+1}) :

- c'est vrai en $p = 0$
- si c'est vrai jusqu'au rang p alors $I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} = \frac{(2p+1)(2p-1)\dots 1}{(2p+2)(2p)\dots 2}\frac{\pi}{2}$

(d) $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin^{2p+1}(x) \leq \sin^{2p}(x) \leq \sin^{2p-1}(x)$ donc par intégration $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$, donc $1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}$, donc $\lim_{p\to+\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$

(e) on déduit de la question précédente : $\lim_{p\to+\infty} \frac{\pi}{2}\left[\frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2}\right]^2 (2p+1) = 1$, d'où la formule de Wallis

(f) On fait la démonstration pour n impair . Soit $n = 2p + 1$:

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p+1)\dots 1} \\ &= \frac{\sqrt{p}}{2p+1}\sqrt{\frac{1}{p}\left(\frac{2p(2p+2)\dots 2}{(2p-1)\dots 1}\right)^2} \\ &\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(2p+1)}}\sqrt{\pi}\ . \end{aligned}$$