

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 4

1. (a) $\forall x \in]0, 1], \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(1/nx) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable sur $[0, 1]$. $\forall x \in]0, 1], \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(1/nx) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ donc par convergence dominée $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) dx = 0$

- (b) $\forall x \in [0, 1], \left| \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right| \leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0, 1]$. On a $\forall x \in [0, 1], \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp(n \log(1 - \frac{x}{n})) = \exp(n(-x/n + o(1/n))) = \exp(-x + o(1)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-x}$ par continuité de la fonction exponentielle. Donc par convergence dominée,

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

- (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \left| \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} \right| \leq \frac{1}{(1+x^2)}$ qui est une fonction intégrable sur $] -\infty, +\infty[$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{(1+x^2)}$ car $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ donc par convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx = [\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

- (d) $\forall x \in \mathbb{R}, e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|} \leq e^{2-|x|}$ qui est une fonction intégrable sur \mathbb{R} . $\forall x \in \mathbb{R}, e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{1-|x|}$ donc par convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1-|x|} dx = 2e^1.$$

- (e) $\forall x \geq 0, \arctan(x/n) e^{-x} \leq (\pi/2) e^{-x}$ qui est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$. $\forall x \geq 0, \arctan(x/n) e^{-x} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ donc par convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x} dx = 0.$$

2. (a) On a pour $0 \leq x \leq n, f_{n+1}(x)/f_n(x) = \exp(g_n(x))$.

$$g'_n(x) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \frac{x}{(1-x/n)(1-x/(n+1))} \geq 0$$

pour $0 \leq x \leq n$ donc g_n croissante sur $[0, n]$. $g_n(0) = 0$ donc $g_n(x) \geq 0 \forall x \in [0, n]$. Donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \forall x \in [0, n]$. C'est également vrai sur $[n, +\infty[$ donc f_n suite de fonctions croissante.

- (b) On a $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. $\forall x \geq 0, f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-x+\alpha x}$ donc par convergence monotone, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x+\alpha x} dx$, donc :

$$I(\alpha) \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{-1+\alpha} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. (a) Pour tout n, k , $0 \leq \frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right) \leq \frac{1}{3^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Pour tout n , $\frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{3^n}$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right) \right] = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}.$$

- (b) Pour tout n, k , $\left| \frac{\sin(n/k)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Pour tout n , $\frac{\sin(n/k)}{2^n} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n/k)}{2^n} \right] = 0.$$

4. Inégalité de Jensen.

- (a) $\forall z, y \in I$ avec $z \leq y$, $\phi(y) - \phi(z) = \int_z^y \phi'(t) dt \geq \int_z^y \phi'(z) dt$ (car ϕ convexe), donc $\phi(y) - \phi(z) \geq \phi'(z)(y - z)$
- (b) On prend $z = \int_E f(t) d\mu(t)$ et $y = f(x)$ dans l'inégalité précédente et on a :

$$\phi(f(x)) \geq \phi\left(\int_E f(t) d\mu(t)\right) + \phi'\left(\int_E f(t) d\mu(t)\right) (y - z).$$

On intègre ensuite par rapport à $d\mu(x)$:

$$\begin{aligned} \int \phi(f(x)) d\mu(x) &\geq \int \phi\left(\int_E f(t) d\mu(t)\right) d\mu(x) + \int \phi'\left(\int_E f(t) d\mu(t)\right) (y - z) d\mu(x) \\ &= \phi\left(\int_E f(t) d\mu(t)\right) + \phi'\left(\int_E f(t) d\mu(t)\right) \left(\int f(x) d\mu(x) - \int f(x) d\mu(x)\right) \\ &= \phi\left(\int_E f(t) d\mu(t)\right). \end{aligned}$$

- (c) La fonction $\phi : x \in [0, 1] \mapsto x^2$ est convexe. Donc par le résultat précédent, pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable,

$$\left(\int_0^1 |f(x)| dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx.$$