UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2005-2006 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Feuille d'exercices numéro 4
Intégrales et limites d'intégrales

1. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{nx}\right)dx$
   (b) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$
   (c) $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}dx$
   (d) $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|}dx.$
   (e) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\arctan(x/n)e^{-x}dx$
2. On pose : $I(\alpha)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}dx$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.
   (a) On pose pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ telle que $f_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\mathbf{1}_{x\le n}$. Montrer que $(f_n)_{n\ge0}$ est une suite croissante de fonctions. (On pourra notamment étudier : $g_n(x)=(n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right)-n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$.)
   (b) En déduire la valeur de $I(\alpha)$ en fonction de α.
3. Soit μ la mesure de comptage ("Card") sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(N))$. Pour toute suite $(u_n)_{n\ge0}$, on a : $\sum_{n\ge0}u_n=\int_{\mathbb{N}}u_n d\mu$.
   (a) Calculer $\lim_{k\to+\infty}\left[\sum_{n\ge0}\frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{k(n+1)}\right)\right]$.
   (b) Calculer $\lim_{k\to+\infty}\left[\sum_{n\ge0}\frac{\sin(n/k)}{2^n}\right]$.
4. Inégalité de Jensen.
   Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E)=1$. Soit $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ convexe et dérivable deux fois (et donc $\phi''\ge0$). Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E)=1$. Soit $f:(E,\mathcal{A})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(R))$ mesurable et telle que $\int_E f(x)d\mu(x)<+\infty$.
   (a) Montrer que $\forall z,y\in I$ avec $z\le y$, $\phi(y)\ge\phi(z)+\phi'(z)(y-z)$
   (b) En prenant $z=\int_E f(t)d\mu(t)$ et $y=f(x)$ dans l'inegalité précédente, montrer que :
   $$\phi\left(\int_E f(x)d\mu(x)\right)\le\int_E\phi\circ f(x)d\mu(x).$$
   (c) En déduire que pour toute fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1|f(x)|dx<+\infty$:
   $$\left(\int_0^1|f(x)|dx\right)^2\le\int_0^1 f(x)^2dx.$$