Université de Nice - Sophia Antipolis
LEG 2 -Probabilités et observation économique - 2005-2006 - 2ème semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html

Corrigé du document 3

I. On a $\mathbb{P}(1.1 < X < 1.4) \approx 0.9192 - 0.8643 = 0.0549$. Par symétrie $\mathbb{P}(-2 < X < -0.5) = \mathbb{P}(0.5 < X < 2) \approx 0.9772 - 0.6915 = 0.2857$. On a $\mathbb{P}(X < 4) = 1 - \mathbb{P}(X < 4) \approx 1 - 0.999968 = 0.000032$.

II. 1. La variable X est de même loi que $m + \sigma Y$ où Y normale centrée réduite. Donc $\mathbb{P}(10 < X < 15) = \mathbb{P}(10 < 12 + 3Y < 15) \approx \mathbb{P}(-0.67 < Y < 0.6) = \mathbb{P}(Y < 0.6) - \mathbb{P}(Y < -0.67) = \mathbb{P}(Y < 0.6) - (1 - \mathbb{P}(Y < 0.67)) \approx 0.7257 - (1 - 0.7486) = 0.4743$.

2. On a $\mathbb{P}(8 < X < 10) = \mathbb{P}(8 < 12 + 3Y < 10) \approx \mathbb{P}(-1.33 < Y < -0.67) = \mathbb{P}(Y < -0.67) - \mathbb{P}(Y < -1.33) = 1 - \mathbb{P}(Y < 0.67) - (1 - \mathbb{P}(Y < 1.33)) \approx (1 - 0.7486) - (1 - 0.9082) = 0.1596$.

III. La variable X est de même loi que $m + \sigma Y$ où Y normale centrée réduite. On a $\mathbb{P}(X > 8) = \mathbb{P}(m + \sigma Y > 8) = \mathbb{P}(Y > (8 - m)/\sigma) = 1 - \mathbb{P}(Y < (8 - m)/\sigma) = 0.125$. Donc $\mathbb{P}(Y < (8 - m)/\sigma) = 0.875$, donc $(8 - m)/\sigma \approx 1.15$. De même, $\mathbb{P}(X < 7) = \mathbb{P}(m + \sigma Y < 7) = \mathbb{P}(Y < (7 - m)/\sigma) = 0.75$ donc $(7 - m)/\sigma \approx 0.67$. D'où le système :

$$\begin{cases} 8 - m & = 1.15\sigma \\ 7 - m & = 0.67\sigma \end{cases}$$

que l'on résoud pour trouver $m \approx 5.60$, $\sigma \approx 2.08$.

IV. La variable X est de même loi que $m + \sigma Y$ où Y normale centrée réduite.

1. On a $\mathbb{P}(X < m) = \mathbb{P}(m + \sigma Y < m) = \mathbb{P}(Y < 0) = 0.5$ et $\mathbb{P}((X - m) > \sigma) = \mathbb{P}(\sigma Y > \sigma) = \mathbb{P}(Y > 1) = 1 - \mathbb{P}(Y < 1) = 0.1587$.

2. On a $\mathbb{P}(X < 15) = \mathbb{P}(m + \sigma Y < 15) = \mathbb{P}(Y < (15 - m)/\sigma) = 0.1711 < 0.5$ donc $(15 - m)/\sigma < 0$, donc par symétrie $\mathbb{P}(Y < (15 - m)/\sigma) = \mathbb{P}(Y > -(15 - m)/\sigma) = 1 - \mathbb{P}(Y < -(15 - m)/\sigma)$ donc $\mathbb{P}(Y < -(15 - m)/\sigma) = 1 - 0.1711 = 0.8289$. Donc $-(15 - m)/\sigma \approx 0.95$.
De même $\mathbb{P}(X > 30) = \mathbb{P}(m + \sigma Y > 30) = \mathbb{P}(Y > (30 - m)/\sigma) = 1 - \mathbb{P}(Y < (30 - m)/\sigma) = 0.0071$ donc $\mathbb{P}(Y < (30 - m)/\sigma) = 0.9929$. Donc $(30 - m)/\sigma \approx 2.45$. D'où le système :

$$\begin{cases} -(15 - m)/\sigma & = 0.95 \\ (30 - m)/\sigma & = 2.45 \end{cases}$$

que l'on résoud pour trouver $m \approx 19.19$, $\sigma \approx 4.41$.

V. Pour le candidat numéro i, on note X_i la note de mathématiques et Y_i la note de français. On note

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i + Y_i \geq 20 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La proportion cherchée est $\frac{Z_1 + \cdots + Z_{100}}{100}$. Les Z_i sont indépendants et donc, par la loi des grands nombres, cette variable aléatoire est en fait proche de la constante $\mathbb{E}(Z_1)$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_1) &= 0\times\mathbb{P}(Z_1=0)+1\times\mathbb{P}(Z_1=1)\\ &= 0+\mathbb{P}(X_1+Y_1>20)\end{aligned}$$

La somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois normales de paramètres 10, 3 et 12, 4 respectivement est une loi normale de moyenne $10+12=22$ et d'écart-type $\sqrt{3^2+4^2}=5$. Soit donc Z de loi normale de paramètre 0, 1, on cherche : $\mathbb{P}(22+5Z>20)=\mathbb{P}(Z>-0.4)=\mathbb{P}(Z<0.4)\approx 0.6554$. Le pourcentage cherché est donc $\approx 66\%$.

VI. 1. On a $\mathbb{P}(X\in\{4,5,6,7,8\})=\sum_{4\le k\le 8}\frac{6^k e^{-6}}{k!}\approx \underline{0.696}$.

2. On sait que $X \overset{\text{loi}}{\approx} \mathcal{N}(6,6)$ (c'est à dire la loi de X est proche d'une loi normale de moyenne 6 et d'écart-type $\sqrt{6}$). Soit Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a donc : $\mathbb{P}(40\le Y\le 80)=\mathbb{P}(4\le X\le 8)\approx\mathbb{P}(4<6+\sqrt{6}Z<8)\approx\mathbb{P}(-0.82\le Z\le 0.82)=2\mathbb{P}(0.82\le Z\le 0.82)\approx 2(0.7939-0.5)=\underline{0.5878}$. (L'approximation n'est pas très bonne. En général, elle est bonne pour des variables de Poisson de paramètre ≥ 10.)

VII. La variable X a la même loi que $2+4Z$ avec Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. La variable Y a même loi que $(2+4Z-2)^2/4^2=Z^2$. Soit $\phi\in C_b^\infty$ (c'est à dire que l'on peut dériver autant de fois que l'on veut et qui est bornée), alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(Y)) &= \mathbb{E}(\phi(Z^2))\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t^2)\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt\\ &= \int_{-\infty}^{0}\phi(t^2)\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt+\int_{0}^{+\infty}\phi(t^2)\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt\end{aligned}$$

On fait les changement de variables : $u=t^2$, $t=-\sqrt{u}$, $dt=-1/(2\sqrt{u})$ dans la première intégrale et $v=t^2$, $t=\sqrt{v}$, $dt=1/(2\sqrt{u})$ dans la deuxième intégrale.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(Y)) &= \int_{+\infty}^{0}\phi(u)\frac{e^{-u}/2}{\sqrt{2\pi}}\frac{-1}{2\sqrt{u}}du+\int_{0}^{+\infty}\phi(v)\frac{e^{-v/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2\sqrt{v}}dv\\ &= \int_{0}^{+\infty}\phi(u)\frac{e^{u}/2}{\sqrt{2\pi}}\frac{-1}{2\sqrt{u}}du+\int_{0}^{+\infty}\phi(v)\frac{e^{-v/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2\sqrt{v}}dv\\ &= 2\int_{0}^{+\infty}\phi(v)\frac{e^{-v/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2\sqrt{v}}dv\\ &= \int_{0}^{+\infty}\phi(v)\frac{e^{-v/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{v}}dv\end{aligned}$$

Donc la densité de Y est $g(v)=\frac{e^{-v/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{v}}$ si $v\ge 0$ et $g(v)=0$ ailleurs.

2. On a $\mathbb{P}(Y<4)=\mathbb{P}(Z^2<4)=\mathbb{P}(-2<Z<2)=2\mathbb{P}(0<Z<2)\approx 2(0.9772-0.5)=0.9554$, $\mathbb{P}(Y<6)=\mathbb{P}(Z^2<6)=\mathbb{P}(-\sqrt{6}<Z<\sqrt{6})\approx\mathbb{P}(-2.45<Z<2.45)=2\mathbb{P}(0<Z<2.45)\approx 2(0.9929-0.5)=0.9858$.