

Feuille d'exercices numéro 5
 Intégrales à paramètre, intégrales multiples.

1. (a) Montrer que $\forall z \geq 0, 0 \leq 1 - e^{-z} \leq z$.
 (b) En déduire que $\forall y > 0, x \mapsto \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
 (c) Pour tout $y > 0$, on pose

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2} dx .$$

Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer $F'(y)$ (on rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$).

- (d) En déduire $F(y)$ à une constante près.
 (e) Calculer cette constante en regardant $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(1/n)$.
2. (a) Montrer que pour tout $y > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2 y)} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)} .$$

- (b) Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2 y)} dx \right) dy = \frac{\pi^2}{2} .$$

- (c) Montrer que pour tout $x > 0, x \neq 1$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2 y)} dy = \frac{2 \log(x)}{x^2 - 1} .$$

- (d) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4} .$$

3. On rappelle que : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En utilisant un changement de variable, calculer :

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-(x+y)^2} e^{-(x-y)^2} dx dy .$$