

Feuille d'exercices numéro 6  
Calculs d'espérances. Calculs de lois.

1. Soit  $X$  variable aléatoire réelle de loi de densité  $\mathbf{1}_{x \geq 0} \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$  fixé (loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ ). Calculer  $\mathbb{E}(X)$  et  $\text{Var}(X)$ . Calculer la densité de la loi de  $2X$ . Calculer  $\mathbb{E}(2X)$ ,  $\text{Var}(2X)$ .
2. Soit  $X$  variable aléatoire réelle de loi de densité  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ ,  $\sigma, m \in \mathbb{R}$  fixés (loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ).  
Soit  $U$  variable aléatoire réelle de loi de densité  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .
  - (a) Montrer que  $\sigma U + m$  a même loi que  $X$ .
  - (b) Calculer  $\mathbb{E}(X)$  et  $\text{Var}(X)$ .
  - (c) Calculer la densité de la loi de  $Y = aX + b$  pour  $a$  et  $b$  réels.
  - (d) Calculer  $\mathbb{E}(Y)$  et  $\text{Var}(Y)$ .
3. Soit  $X$  variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que  $\forall k \geq 0, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!}$  ( $\theta > 0$  fixé). Calculer  $\mathbb{E}(X)$ . Pour  $u \geq 0$ , calculer  $\mathbb{E}(e^{-uX})$ .  
Rappel :  $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t$ .
4. Soit  $(X, Y)$  variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  de loi de densité  $\frac{3}{4} \exp(-|x+2y| - |x-y|)$ . Calculer la densité de la loi de  $(X+2Y, X-Y)$  puis les densités des lois de  $X$  et  $Y$ . (On pourra utiliser un changement de variable approprié.)
5. Soit  $Y$  variable aléatoire réelle de densité  $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ . Montrer que  $1/Y$  a même loi que  $Y$ .