UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2005-2006 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
`http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html`

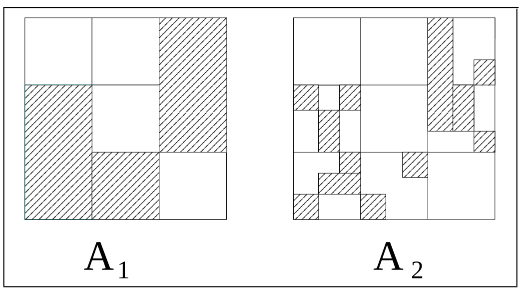
Feuille d'exercices numéro 8

1. Soient U de loi uniforme sur $[0,1]$ et X de loi exponentielle de paramètre 1 deux variables aléatoires réelles indépendantes.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(\sup(U,X) \leq t)$ dans les 3 cas suivants : $t < 0$, $t \in [0,1]$, $t > 1$.
   (b) Dessiner la fonction de répartition de $\sup(U,X)$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y$, $|f(x) - f(y)| \leq C \inf(1, |x-y|)$ pour une certaine constante C.
   (a) Si $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} X$ (rappel : pour p.t. ω, $X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)$), montrer que $\mathbb{E}(f(X)) - \mathbb{E}(f(X_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (b) Soit $\epsilon > 0$, toujours sous l'hypothèse $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} X$, déduire de la question précédente que $\mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| \geq \epsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. On achète un stock d'ampoules pour un lampadaire. Les ampoules ont une durée de vie de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. La première ampoule dure un temps X_1, on la remplace immédiatement et la deuxième qui dure un temps X_2 ... Soit $T > 0$. On admet que le nombre d'ampoules N grillées pendant le temps T est tel que N est de loi $\mathcal{P}(\lambda T)$. On suppose que $\lambda T \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $m = \mathbb{E}(N)$.
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{P}(N \geq m+p) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{m+p} \leq T)$.
   (c) On suppose maintenant que $\lambda = 1$, $T = 20$, $p = 5$. Donner une valeur numérique approchée de $\mathbb{P}(N \geq m+p)$ à l'aide de la table jointe.
   (d) Avec les mêmes valeurs numériques que ci-dessus, combien d'ampoules faut-il acheter au minimum pour que $\mathbb{P}(\text{se retrouver à court d'ampoules avant le temps } T) < 0.05$?

4. Soit $p \in [0,1]$. Soit A_0 le carré $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. L'ensemble A_1 est un ensemble aléatoire construit de la manière suivante : on découpe A_0 en 9 carrés, chaque petit carré appartient à A_1 avec probabilité p (indépendamment des autres). On recommence l'opération sur les carrés de A_1 pour former A_2 (de manière indépendante de ce qui s'est passé avant) et ainsi de suite, on obtient des ensembles $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Si $A_n = \emptyset$ alors $\forall k \geq n$, $A_k = \emptyset$. La figure ci-dessous représente une réalisation de A_1 et A_2 (hachurés) pour une certaine valeur de p.



(a) Pout tout n, on note Z_n le nombre de carrés de côté $1/3^n$ formant A_n. Soit $n \geq 1$, montrer que $\forall r \in [0,1]$, $g_{Z_n}(r) = g_{Z_n - 1}(f(r))$ où $\forall r \in [0,1], f(r) = (pr + 1 - p)^9$.

(b) En déduire que $g_{Z_n}(r) = f^{\circ n}(r)$ ("$\circ n$" veut dire que l'on compose n fois).

(c) Montrer que f est convexe (c'est à dire que sa dérivée est une fonction croissante).

(d) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f'(1)$. Faire un dessin de f.

(e) On suppose que $p \leq 1/9$.

   i. Montrer que $\forall r \in [0,1]$, $g_{Z_n}(r) \to 1$.

   ii. En déduire que $\mathbb{P}(Z_n = 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

   iii. En déduire que $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$. (On pourra considérer l'événement $\{\omega : Z_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$ comme une réunion croissante d'événements.)

(f) Pour tout n, soit Y_n l'aire de A_n. Montrer en utilisant les espérances conditionelles que $\mathbb{E}(Y_n) = p^n$. En déduire que $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$.