UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2005-2006 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 9

1. La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto |t|^{q/p}$ est convexe donc par inégalité de Jensen, $\mathbb{E}(|X|^p)^{q/p} \leq \mathbb{E}((|X|^p)^{q/p}) = \mathbb{E}(|X|^q)$.

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}, a_n \leq k \leq \inf(b_n,n)} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} &= \mathbb{P}(Y_n \in [a_n, b_n]) \\
&= \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \in [\sqrt{p(1-p)n}a + np, \sqrt{p(1-p)n}b + np]) \\
&= \mathbb{P}(\frac{X_1 + \dots + X_n - np}{\sqrt{p(1-p)n}} \in [a,b]) \\
\text{TCL} \quad &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} .
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > t_1 + t_2 | X > t_1) &= \frac{\mathbb{P}(X > t_1 + t_2, X > t_1)}{\mathbb{P}(X > t_1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X > t_1 + t_2)}{\mathbb{P}(X > t_1)} \\
&= \frac{\int_{t_1+t_2}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_{t_1}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t_1+t_2)}}{e^{-\lambda t_1}} \\
&= e^{-\lambda t_2} \\
&= \mathbb{P}(X > t_2) \ .
\end{aligned}$$