Cours de L3 MASS

Intégration et probabilités

Le but de ce cours est d'introduire les notions de théorie de la mesure qui seront utiles en calcul des probabilités et en analyse.

Chapitre 1 : Dénombrabilité

Déf : On dit qu'un ensemble E est dénombrable s'il existe une *injection* de E dans $\mathbb{N}$.
(Ce qui revient à dire que l'on peut compter ou dénombrer les éléments de E)

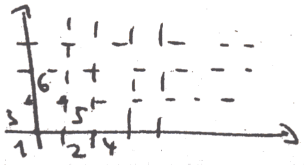
càd $f : E \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Exemples :

* $\mathbb{Z}$ est dénombrable

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -(2n)+1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable



$$(p,q) \longmapsto \frac{(p+q)(p+q-1)}{2} + q + 1$$

* $\mathbb{Q}$ est dénombrable
* $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

<u>Proposition :</u> si on a $E_0, E_1, \dots, E_n, \dots$ des ensembles dénombrables alors $\underbrace{\bigcup_{n\geq 0} E_n}_{= E}$ est un ens. dénombrable

(càd : une réunion dén. d'ens. dén. est dén.)

<u>démonstration :</u>

pour chaque E_i on a $f_i : E_i \longrightarrow \mathbb{N}$ injective

soit $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ injective

soit $x \in E$, on pose $F(x) = (i, f_i(x))$ si $x \in E_i$ (avec $i = \inf\{j, x \in E_j\}$)

et on pose $f(x) = g(F(x))$

on a $f : E \longrightarrow \mathbb{N}$ et f injective

en effet : si x et $y \in E$

si $f(x) = f(y)$ alors comme g est injective :

$F(x) = F(y)$

$(i, f_i(x)) = (j, f_j(y))$ donc $i = j$ et $f_i(x) = f_j(y)$

or f_i injective donc $x = y$ $\square$

<u>Remarques :</u>
* un ens. fini est dénombrable
* un ens. dén. infini est toujours en bijection avec avec $\mathbb{N}$

<u>Notation :</u> une famille dénombrable se note $(x_i)_{i\in I}$, (I l'ens. des indexs est alors dénombrable) ou $(x_i)_{i\geq 1}$

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

I) Tribus et mesures

1. Tribus

Soit Ω un ensemble (que l'on appellera "univers")

Déf : une famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω est une tribu si elle vérifie :

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$

iii) si on a une famille dénombrable de parties de Ω : $(A_i)_{i \in I}$ (I ens. dén.)

alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$

Remarque : attention, une tribu est un ensemble de parties de Ω (et chaque partie est un ensemble d'éléments de Ω) – on appellera ces parties "événements"

Exemple :

* sur Ω ensemble quelconque
  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu
* sur $\mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (ens. des parties de $\mathbb{N}$) est une tribu

en effet : • $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{N}$

• si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $A^c \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

• si on a une famille dén. (ou pas), sa réunion est encore une partie

<u>intersection dénombrable (ou finie)</u>

si on a $(A_n)_{n\geq 0}$
posons pour tout n :
$B_n = A_n^c$ ($\in \mathcal{A}$)

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n = \underbrace{\Big[\underbrace{\bigcup_{n\geq 1} A_n^c}_{\in \mathcal{A}}\Big]^c}_{\in \mathcal{A}}$$

donc on a stabilité par intersection dénombrable (ou finie)

Notation : si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on note $\sigma(\mathcal{A})$ la plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{A}$.

Déf : tribu borélienne

On appelle tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ la plus petite tribu contenant tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.
On la note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ses éléments s'appellent des boréliens.

Propriété (non démontrée) :

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ qui contient tous les intervalles ouverts alors $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$.
(C'est le sens de "plus petite".)

Remarque : * Soit $[a,b]$ intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

$]-\infty, a[$ et $]b, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (car ce sont des intervalles ouverts)

donc $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[= B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (réunion dén.)

donc $B^c = [a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (passage au complémentaire)

* ceci implique que si $x \in \mathbb{R}$ alors $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

de m : n'importe quel intervalle est un borélien.

2. Mesures

CONVENTIONS : si $x \in \mathbb{R}$, $x + \infty = +\infty$
$0 \times \infty = 0$
valables pour les calculs en théorie de la mesure et en intégration (pas ailleurs ⚠)

Déf : Soit Ω un ens. muni d'une tribu $\mathcal{A}$. On dit que μ est une mesure (positive) sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si :

i) $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$

ii) $\mu(\emptyset) = 0$

iii) pour toute famille dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'él. de $\mathcal{A}$: $\mu\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i)$

⚠ deux à deux disjoints

Notation : quand on a un ens. Ω muni d'une tribu $\mathcal{A}$ et d'une mesure μ, on dit que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré

Exemple : $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{Card})$ est un ens. mesuré

en effet : (i) à toute partie A de $\mathbb{N}$ on peut associer son cardinal (le nbr. d'él. si A finie ou $+\infty$ si A infinie)

(ii) $\emptyset$ est de cardinal 0

(iii) $\text{Card}(\bigcup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i\geq 1} \text{Card}(A_i)$ si tous les A_i sont finis

si $\exists i_0$ avec A_{i_0} infini alors $\bigcup_{i\geq 1} A_i$ infini

donc on a bien $\text{Card}(\bigcup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i\geq 1} \text{Card}(A_i) = \infty$

⚠ avec la convention suivante : si $x \in \mathbb{R}^+$, $x + \infty = +\infty$

~~Théorème~~ : MESURE DE LEBESGUE

Il existe une unique mesure λ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ vérifiant :

i) pour tout intervalle borné $]a,b[$, $\lambda(]a,b[) = b - a$

ii) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$: $\lambda(\underbrace{A + x}_{:= \{x+y,\, y\in A\}}) = \lambda(A)$

FAIRE L'EXEMPLE CI-DESSOUS

Déf : La mesure λ définie au théorème ~~précédent~~ s'appelle la mesure de Lebesgue.

Remarques :

mesure d'une réunion croissante

$A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$

posons $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ (pour $n \geq 1$)

les B_n sont 2 à 2 distincts

donc $\underbrace{\mu(\bigcup_{n\geq 1} B_n)}_{= \mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n)} = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n)$

$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n)$

$= \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)$

donc $\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)$

(qui vaut éventuellement $+\infty$)

* mesure d'une intersection décroissante

on suppose que l'on a :

$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$

avec $\mu(A_0) < \infty$

posons $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$ (pour $n \geq 0$)

$\mu(\bigcap_{n\geq 0} A_n) = \mu(A_0) - \mu(\bigcup_{n\geq 0} B_n)$

$= \mu(A_0) - \sum_{n\geq 0} \mu(B_n)$

$= \mu(A_0) - \lim_{N\to\infty} (\mu(B_0) + \dots + \mu(B_N))$

$= \lim_{N\to\infty} \mu(A_{N+1}) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)$

Ex : mesure de $B = \mathbb{Q} \cap [0,1] \rightsquigarrow B = \{u_0, u_1, \dots\}$

$B \subset A_n = \bigcup_{i\geq 0} [u_i - \frac{1}{n2^i} ; u_i + \frac{1}{n2^i}]$ et $\lambda(A_n) = \frac{2}{n}$

et cela $\forall n$, donc $\lambda(B) = 0$

II) Intégrale des fonctions étagées mesurables positives

On se donne un ens. mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Déf: Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$. On dit que f est étagée positive si il existe une famille finie $A_1, \dots, A_N$ de $\mathcal{A}$ telle que :

i) les A_i forment une partition de Ω

ii) la restriction de f à chaque A_i est une constante $\geqslant 0$

Propriétés des mesures : Soit μ mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

* **Croissance**

a) $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

b) si en outre $\mu(A) < +\infty$ alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \leq +\infty$

c) si $\mu(A) = +\infty$, on ne peut rien dire sur $\mu(B \setminus A)$

dém :

$B = B \setminus U \cup A$ et cette union est disjointe

donc $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$

donc $\mu(A) \leq \mu(B)$

et si $\mu(A) < +\infty$: $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ $\square$

exemples : . $\lambda([0,2] \setminus [0,1]) = \lambda(]1,2]) = 1$

. $\lambda(\mathbb{R} \setminus [0,+\infty[) = +\infty \neq \underbrace{\lambda(\mathbb{R}) - \lambda([0,+\infty[)}_{\text{qui n'a aucun sens}}$

. $\lambda(\{0\}) \leq \lambda([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]) = \frac{2}{n}$ $\forall n \Rightarrow$ donc $\lambda(\{0\}) = 0$

* **Sous - additivité**

si $A_0, A_1, \ldots \in \mathcal{A}$ (pas forcément disjoints) alors

$\mu(\bigcup_{n \geq 0} A_n) \leq \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$

démonstration :

pour $n \geq 1$, posons $B_n = A_n \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$ et $B_0 = A_0$

les B_n sont 2 à 2 disjoints et $\bigcup_{n \geq 0} B_n = \bigcup_{n \geq 0} A_n$

donc $\mu(\bigcup_{n \geq 0} A_n) = \sum_{n \geq 0} \underbrace{\mu(B_n)}_{\substack{\leq \mu(A_n) \\ \text{car } B_n \subset A_n}} \leq \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$ $\square$

exemple : $\lambda([0,2] \cup [1,3]) = 3 \leq \lambda([0,2]) + \lambda([1,3]) = 4$

Rappels :

* les A_i forment une partition de Ω signifie que :

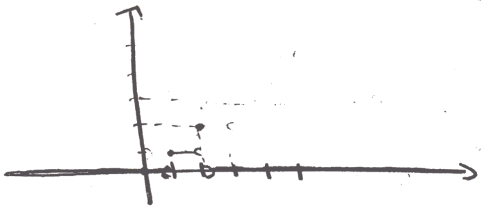
$$\begin{cases} \forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \\ \bigcup_{1 \leq i \leq N} A_i = \Omega \end{cases}$$

(c'est un découpage de Ω)

* la restriction de f à chaque A_i est constante signifie que si x et $y \in A_i$ alors $f(x) = f(y)$

Exemple :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ [x] & \text{si } x \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



ensembles A_i :
$]-\infty, 1[$, $[1, 2[$, $\{2\}$, $]2, +\infty]$

Déf : Soit $f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction étagée positive avec une partition associée $(A_i)_{1 \leq i \leq N}$. On note f_i la valeur prise par f sur A_i $(\forall i)$. On appelle intégrale de f et on note :

$$\int_\Omega f \, d\mu$$

le nombre : (fini ou infini) :

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{i=1}^{p} f_i \, \mu(A_i)$$

Exemple : * avec f de l'ex. ci-de[ssus]

$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = 0 \times \infty + 1 \times 1 + 2 \times 0 + 0 \times \infty$
$= 1$

(avec la convention : $0 \times \infty = 0$)

* si $f = \mathbb{1}_A$
$\int_\Omega f \, d\mu = \mu(A)$

Déf : Une fonction étagée positive est dite intégrable si $\int_\Omega f \, d\mu < \infty$

Remarque : on a pris une fonction étagée f définie avec une certaine partition $A_1, \dots, A_N$

si on a B_1 et B_2 tel que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ et $B_1 \cup B_2 = A_1$

on peut aussi définir f sur la partition : $B_1, B_2, A_2, \dots, A_N$

cela ne change pas la valeur de l'intégrale

III) Fonctions mesurables ... et intégrale

1) ~~Fo~~ Intégrale des fonctions mesurables positives

Déf: Si Ω et Ω' sont deux ensembles munis respectivement de tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}'$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \Omega'$ est mesurable par ~~rapport aux tribus~~ $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ (on dira aussi mesurable ~~tout court~~) ssi $\forall B \in \mathcal{B}$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in \Omega, f(x) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

Cas particulier: $f : \Omega \to [0,+\infty]$ est dite mesurable si $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(A \cap [0,+\infty[) \in \mathcal{A}$

Propriétés:

a) Toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable (par rapport à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

b) Si f et g sont des fonctions mesurables $\Omega \to \mathbb{R}$ alors $f+g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$ (avec la convention $\frac{x}{0} = +\infty$) sont mesurables.

c) Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue alors $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable.

Remarques:

* Grâce à ces propriétés, il sera facile de montrer que toute fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par une formule est mesurable.
* <u>Mesure image</u>

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un ensemble mesuré. Soit $(\Omega', \mathcal{B})$ un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{B}$. Soit $f : \Omega \to \Omega'$ mesurable.

On définit $\nu : \mathcal{B} \to [0,+\infty]$ par $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$.

Alors ν est une mesure sur $(\Omega', \mathcal{B})$.

En effet:

$\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ car μ mesure

si on a une famille dénombrable d'él. de $\mathcal{B}_Y$: $(B_i)_{i\geq 1}$ deux à deux disjoints

$$\nu\Big(\bigcup_{i\geq 1} B_i\Big) = \mu\Big(f^{-1}\Big(\bigcup_{i\geq 1} B_i\Big)\Big)$$

$$= \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{i\geq 1} f^{-1}(B_i)}_{\text{deux à deux disjoints}}\Big)$$

$$= \sum_{i\geq 1} \mu(f^{-1}(B_i))$$

$$= \sum_{i\geq 1} \nu(B_i)$$

> Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$
> mesure image de λ : $\nu(B) = \lambda(f^{-1}(B))$
> $\nu([a,b]) = \lambda([\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]) = \frac{(b-a)}{2}$

> * Mesures à densité : ⚠
> Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$
> $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$
> $A \longmapsto \int f(x) \mathbb{1}_A(x)\, dx$ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
> On dit que f est sa densité par rapport à λ

__Déf :__ Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré [illegible] $\mathcal{A}$. Si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est mesurable (par rapport à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) positive, l'intégrale sur Ω de f est définie par :

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sup_{\varphi \in \mathcal{E}(f)} \int_\Omega \varphi\, d\mu$$

(on notera aussi : $\int_\Omega f(x)\, \mu(dx)$ ou $\int_\Omega f(x)\, d\mu(x)$)

où $\mathcal{E}(f)$ est l'ensemble des fonctions étagées positives φ telles que $\varphi \leq f$ (càd $\varphi(x) \leq f(x)$, $\forall x \in \Omega$).

__Déf :__ Une fonction mesurable positive f est dite intégrable si $\int_\Omega f\, d\mu < +\infty$.

__Proposition :__ __L'intégrale est croissante.__

Si f et g sont deux fonctions positives mesurables sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et si $f \leq g$ alors $\int_\Omega f\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu$.

Appendice au Chapitre 3 :

La fonction de répartition

On se donne μ une mesure sur $\mathbb{R}$ telle que $\mu(\mathbb{R}) < \infty$.

On note $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty[$

$x \longmapsto \mu(]-\infty, x])$

c'est la fonction de répartition $\rightarrow$ elle est $\nearrow$

On fixe $x \in \mathbb{R}$: * $\forall$ la suite $u_n \nearrow x$, $F(u_n)$ est $\nearrow$ et majorée par $F(x)$ donc $F(u_n)$ a une limite

donc F est làg $\rightarrow$ réunion croissante : cette limite est $\mu(]-\infty, x[$

* $\forall$ la suite $u_n \searrow x$: $F(u_n) = \mu(]-\infty, u_n])$

$F(u_0) < \infty$

donc (mesure d'une intersection décroissante) :

$F(u_n) \longrightarrow \mu(\bigcap_{n \geq 1}]-\infty, u_n]) = \mu(]-\infty, x])$

donc F est càd

Limite en $+\infty$: par réunion $\nearrow$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \mu(\mathbb{R})$

Limite en $-\infty$: par intersection $\searrow$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \mu(\emptyset) = 0$

Continuité : F est continue en x ssi $F(x)$ est égal à la lim. à gauche

càd ssi $\mu(]-\infty, x]) = \mu(]-\infty, x[)$

càd $\mu(\{x\}) = 0$

<u>démonstration</u> : on suppose $f \leq g$ (càd $\forall x, f(x) \leq g(x)$)

si $\varphi \in \mathcal{E}(f)$ alors $\varphi \in \mathcal{E}(g)$

donc $\displaystyle \sup_{\varphi \in \mathcal{E}(f)} \int_\Omega \varphi \, d\mu \leq \sup_{\varphi \in \mathcal{E}(g)} \int_\Omega \varphi \, d\mu$

donc $\displaystyle \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$ $\square$

Cette proposition admet comme corollaire le théorème suivant.

<u>Théorème</u> : <u>Théorème de comparaison</u>

Si f et g sont deux fonctions positives mesurables avec $f \leq g$ et g intégrable. Alors f est intégrable.

<u>Théorème</u> : <u>Linéarité de l'intégrale</u>

Si f et g sont deux fonctions mesurables positives :

$$\int_\Omega (f+g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu . \text{ Et si } a \geq 0 : \int_\Omega a f \, d\mu = a \int_\Omega f \, d\mu.$$

En particulier, si f et g sont intégrables alors $f+g$ aussi.

<u>Théorème</u> : <u>Inégalité de Markov</u>

Soit f mesurable positive. Soit $a > 0$.

$\displaystyle \int_\Omega f \, d\mu \leq \frac{1}{a} \mu(\{x : f(x) > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_\Omega f \, d\mu$

<u>démonstration</u> : c'est en fait un corollaire du th. de comparaison

$\forall x \in \Omega : f(x) \geq a \mathbb{1}_{f(x) \geq a}$

donc

$\displaystyle \int_\Omega f \, d\mu \geq \int_\Omega a \mathbb{1}_{f(x) \geq a} \, d\mu$

$= a \mu(\{x : f(x) > a\})$

$\square$

2) Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

Si $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable elle peut s'écrire $f = f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- deux fonctions mesurables positives.

$$f^+(x) \begin{cases} = f(x) \text{ si } f(x) \geq 0 \\ = 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad f^-(x) \begin{cases} = -f(x) \text{ si } f(x) < 0 \\ = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

<u>Déf</u>: On dit que f est intégrable si f^+ et f^- le sont.
Dans ce cas : $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu$.

<u>Remarque</u> : pour f de signe quelconque intégrable
$\left| \int_\Omega f \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu$
(comparaison)

<u>Théorème</u> : on a encore linéarité de l'intégrale et la croissance.

<u>Remarque</u> (sur $\mathbb{R}$). <u>Lien avec l'intégrale de Riemann (et l'intégrale de Riemann généralisée) et l'intégrale % mesure de Lebesgue</u>

Si f est mesurable positive et a une intégrale de Riemann (ou une intégrale de Riemann généralisée) alors cette intégrale coïncide avec l'intégrale de Lebesgue.

Si f est mesurable et a une intégrale de Riemann alors f a une intégrale de Lebesgue et les deux intégrales coïncident.

Définition : (à mettre à la fin du chap précédent) si $A \in \mathcal{A}$, on note $\int_A f d\mu = \int_\Omega f \mathbb{1}_A d\mu$.
On peut ainsi intégrer une fonction définie sur A seulement (en la prolongeant par 0 ailleurs).

Chapitre 3 : Ensembles négligeables

Déf : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
$A \in \mathcal{A}$ est dit négligeable (pour la mesure μ) si $\mu(A) = 0$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable est μ-presque partout nulle si $\exists A \in \mathcal{A}$ négligeable tel que $x \in A^c \Rightarrow f(x) = 0$

on dira aussi que : f est
- presque partout nulle
- μ-presque sûrement —
- presque sûrement —
- p.p. —
- p.s. —

Remarque : Soit A ensemble négligeable et f intégrable alors $\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega \setminus A} f d\mu$.

Théorème :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré. Il existe une tribu $\mathcal{B}$ et une mesure ν sur $\mathcal{B}$ telles que :

* $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$
  $\forall N \subset \Omega$ avec $N \subset A$ où $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$: on a $N \in \mathcal{B}$
* pour un N ayant les propriétés ci-dessus : $\nu(N) = 0$

Notation : $\mathcal{B}$ est alors appelée tribu complétée de $\mathcal{A}$
ν ——————— mesure complétée de μ

un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tel que si $N \subset A$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $\mu(A) = 0$ implique que $N \in \mathcal{A}$ est dit complet

Théorème : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré et f fonction mesurable positive.
Alors f est p.p. nulle ssi $\int_\Omega f \, d\mu = 0$

démonstration :

* si f est p.p. nulle : $\exists A$ $(\in \mathcal{A})$ avec $\mu(A) = 0$ et $x \in A^c \Rightarrow f(x) = 0$
soit g fonction étagée positive, $g \leq f$, associée à une partition $C_1, \dots, C_N$ (valeurs $g_1, \dots, g_N$)
$\int_\Omega g \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} g_i \, \mu(C_i)$

$\begin{cases} \text{si } C_i \cap A^c \neq \emptyset \text{ alors } g_i = 0 \\ \text{si } C_i \subset A \text{ alors } \mu(C_i) = 0 \end{cases}$

donc $\int_\Omega g \, d\mu = 0$

cela est vrai $\forall g$ étagée positive $\leq f$, donc $\int_\Omega f \, d\mu = 0$

* si $\int_\Omega f \, d\mu = 0$: posons pour tout $n \geq 1$, $A_n = \{x \in \Omega \, / \, f(x) > \frac{1}{n}\}$
$\forall n$, $A_n \in \mathcal{A}$ car f mesurable $(A_n = f^{-1}(\,]\frac{1}{n}, +\infty[\,))$
et on a : $A_{n+1} \supset A_n$

soit g_n la fonction étagée suivante : $\begin{cases} g_n(x) = 0 \text{ si } x \notin A_n \\ g_n(x) = \frac{1}{n} \text{ si } x \in A_n \end{cases}$

on a $g_n \leq f$ donc $\int_\Omega g_n \, d\mu = 0$

càd $\frac{1}{n} \mu(A_n) = 0$ donc $\mu(A_n) = 0$

$\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0$

réunion ↗

or $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \{x \in \Omega : f(x) > 0\}$

↳ notons A cet ensemble

$\forall x \in A^c$, $f(x) = 0$ et $\mu(A) = 0$

donc f est p.p. nulle $\square$

Chapitre 4 : Théorèmes limites

On se donne $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré complet. ⚠
On supposera à partir de maintenant que Ω est réunion dénombrable (ou finie) d'él. de $\mathcal{A}$ de mesure finie. ↳ Ω est dit σ-fini

I. Stabilité de la mesurabilité par passage à la limite

Théorème : Soit $f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont des fonctions mesurables.

idée de démonstration : pour le sup

rappel : $(\sup_n f_n)(x) = \sup_n f_n(x)$

on pose $f = \sup_n f_n$

on va montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{A}$

(et cela est en fait suffisant pour dire que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$)

posons $A = f^{-1}(]-\infty, a])$

$x \in A$ ssi $f_n(x) \leq a$, $\forall n$

càd si $x \in A_n = \{y \in \Omega : f_n(y) \leq a\}$

$\forall n$, $A_n \in \mathcal{A}$

$A = \bigcap_{n \geq 0} A_n$ est donc un élément de $\mathcal{A}$ □

Déf : on se donne des fonctions $\Omega \to \mathbb{R}$, on dit que $f_n \xrightarrow{p.s.} f$ si $\exists A$ avec $\mu(A) = 0$ et $x \in A^c \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$

Corollaire : (si on a au plus 2)

Si les f_n sont mesurables positives et convergent p.s. vers f alors f est mesurable.

démonstration : on suppose $f_n \to f$ simplement (rappel : cv simple veut dire que $\forall x$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$)

pour tout x de Ω, on pose : $v_n(x) = \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\}$

par le th. précédent, les fonctions v_n sont mesurables

on a $f(x) = \inf\{v_0(x), v_1(x), \dots\}$

↳ qui est mesurable par le th. précédent

□

II. Théorèmes de convergence pour les intégrales

Théorème de convergence monotone :

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. On suppose qu'il existe une fonction f et $A \in \mathcal{A}$ tels que : $\mu(A^c) = 0$
si $x \in A$ alors $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ et $(f_n(x))$ suite croissante.

Alors f est mesurable et : $\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$.

démonstration : (difficile)

f est le sup des f_n sauf sur un ensemble de mesure nulle et comme dans le théorème de la partie I, ceci implique que f est mesurable (on ne démontre pas ce point)

on fait la démonstration dans le cas $\int_\Omega f \, d\mu < \infty$
(le cas $\int_\Omega f \, d\mu = \infty$ est similaire)

soit $\varepsilon > 0$

soit g étagée positive telle que $\int_\Omega f \, d\mu - \int_\Omega g \, d\mu < \varepsilon$

on note $C_1, \dots, C_N$ une partition associée à g

on peut aussi lui associer la partition $C_1 \cap A, \dots, C_N \cap A,$
$C_1 \cap A^c, \dots, C_N \cap A^c$

$\forall i : \mu(C_i \cap A^c) = 0$

posons $B_i = C_i \cap A^c$ et g_i la valeur prise par g sur C_i

et $B_{i,n} = \{x \in B_i : f_n(x) \geq g_i - \frac{\varepsilon}{\mu(B_i) N}\}$ (pour tout $n \geq 1$)

on a $B_{i,1} \subset B_{i,2} \subset \dots$ (pour tout i)

$\bigcup_{n \geq 1} B_{i,n} = \{x \in B_i : \sup_n f_n(x) \geq g_i - \frac{\varepsilon}{N \mu(B_i)}\} = B_i$ car $\forall x \in B_i$, $f_n(x) \to f(x) \geq g_i$

réunion croissante $\mu(B_i) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_{i,N}\right)$

donc $\exists p \,/\, \mu(B_i) - \mu(B_{i,p}) \leq \left(\frac{\varepsilon}{N}\right) \times \mu(B_i)$ (pour tout i)

on pose $A_i = B_i \setminus B_{i,p}$ (pour tout i)

et φ la fonction étagée sur la partition $A_1, \dots, A_N, B_{1,p}, \dots, B_{N,p}, A$

avec $\begin{cases} \varphi(x) = 0 & \text{si } x \in A_1 \cup \dots \cup A_N \cup A \\ \varphi(x) = g_i - \frac{\varepsilon}{N} & \text{si } x \in B_{i,p} \end{cases}$

on a : $\varphi \leq f_p$

donc $\int_\Omega f_p \, d\mu \geq \int_\Omega \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \left(g_i - \frac{\varepsilon}{N\mu(B_i)}\right) \mu(B_{i,p})$

on a : $\int_\Omega g \, d\mu - \int_\Omega \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} g_i \underbrace{\mu(C_i)}_{= \mu(B_i)} - \left(g_i - \frac{\varepsilon}{N\mu(B_i)}\right)\mu(B_{i,p})$

$$= \sum_{i=1}^{N} g_i \, \mu(B_i) - \left(g_i - \frac{\varepsilon}{\mu(B_i)N}\right) \mu(B_{i,p})$$

$$= \sum_{i=1}^{N} g_i \left(\mu(B_i) - \mu(B_{i,p})\right) + \frac{\varepsilon}{\mu(B_i)N} \mu(B_{i,p})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} g_i \frac{\varepsilon}{N} \mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{N} \mu(B_i)$$

$$= \varepsilon\left(\int_\Omega g \, d\mu + 1\right)$$

$$\leq \varepsilon\left(\int_\Omega f \, d\mu + 1\right)$$

[illegible]

donc $\int_\Omega f \, d\mu - \int_\Omega f_p \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu - \int_\Omega g \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu - \int_\Omega \varphi \, d\mu$

$$\leq \varepsilon\left(\int_\Omega f \, d\mu + 2\right)$$

et cela $\forall \varepsilon > 0$

la suite des $\left(\int_\Omega f_n \, d\mu\right)_{n \geq 1}$ est croissante

donc $\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$

<u>contre-exemple</u>

Si on prend des fonctions (f_n) non positives.

$f_n(x) \begin{cases} = e^{-x} \mathbb{1}_{x>0} \text{ si } x \leq n \\ = -e^{-x} \dfrac{(1-e^{-n})}{e^{-n}} \text{ si } x \geq n \end{cases}$

$\forall n : \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 0$

et $f_n \to f(x) = e^{-x}$

$\underbrace{\int \liminf f_n \, d\lambda}_{=1} \not\leq \liminf \int f_n \, d\lambda = 0$ $\square$

<u>Théorème : Lemme de Fatou</u>

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives.
On note $f = \liminf_n f_n$. Alors f est mesurable (positive) et :

$$\int_\Omega f \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$$

<u>démonstration :</u>

sans le démontrer entièrement, on peut dire que f est mesu[rable] car c'est un inf. (cf. th. de la partie I)

On fixe $m \geq 1$. On pose $A_n = \{x : f_n(x) \geq (f(x) - \frac{1}{m})^+\}$

$\forall x \in \Omega : f(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x)$ donc $\exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow f_n(x) \geq f(x) - \frac{1}{m}$

$f_n(x) \geq 0$ donc on a alors :

$f_n(x) \geq (f(x) - \frac{1}{m})^+$

on a donc : $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \Omega$

$$\int_\Omega f_n \, d\mu \geq \int_\Omega f_n \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \geq \int_\Omega \underbrace{(f - \tfrac{1}{m})^+ \mathbb{1}_{A_n}}_{\text{fonctions mesurables positives}} \, d\mu$$

$(f(x) - \frac{1}{m})^+ \mathbb{1}_{A_n}(x) \underset{(n \to \infty)}{\nearrow} (f(x) - \frac{1}{m})^+$

donc (th. de convergence monotone) : $\int_\Omega (f - \frac{1}{m})^+ \mathbb{1}_{A_n} d\mu \to \int_\Omega (f - \frac{1}{m}) d\mu$

et $\liminf_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \geq \int_\Omega \underbrace{(f - \frac{1}{m})^+}_{\text{fonction mesurable positive}} d\mu$

et cela $\forall m \geq 1$

$(f(x) - \frac{1}{m})^+ \underset{(m \to \infty)}{\nearrow} f(x)$

donc (th. de convergence monotone) : $\int_\Omega (f - \frac{1}{m})^+ d\mu \underset{(m \to \infty)}{\to} \int_\Omega f \, d\mu$

donc $\liminf_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \geq \int_\Omega f \, d\mu$

$\square$

<u>Théorème de convergence dominée (appelé aussi "Théorème de Lebesgue")</u>

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω. On suppose $\exists g$ mesurable et intégrable telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega, \; |f_n(x)| \leq g(x)$. On suppose que f_n cv presque partout vers f MESURABLE (càd $\exists A \in \mathcal{A}$ avec $\mu(A^c) = 0$ et $x \in A \Rightarrow f_n(x) \underset{(n \to \infty)}{\to} f(x)$)

Alors : f intégrable et $\lim_{n \to \infty} \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu = 0$

et en particulier : $\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$

<u>démonstration du th. de CV dominée :</u>

on suppose que $f_n \to f$ simplement

on a $\forall x : |f(x)| \leq g(x)$ donc f est intégrable

Lemme de Fatou :

$$\liminf \int \underbrace{(2g - |f - f_n|)}_{\text{fonction} \geq 0} d\mu \geq \underbrace{\int \liminf (2g - |f - f_n|) d\mu}_{= 2\int g\, d\mu}$$

donc $\int 2g\, d\mu - \limsup \int |f - f_n| d\mu \geq 2 \int g\, d\mu$

$$\limsup \int |f - f_n| d\mu = 0$$

On ne fait pas la démonstration (qui est trop technique). On remarque simplement que si :

$\int_\Omega |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ alors :

$\left| \int_\Omega f \, d\mu - \int_\Omega f_n \, d\mu \right| = \left| \int_\Omega (f - f_n) \, d\mu \right|$ (par linéarité)

or $\int_\Omega f - f_n \, d\mu \leq \int_\Omega |f - f_n| \, d\mu$

et $-\int_\Omega f - f_n \, d\mu \leq \int_\Omega |f - f_n| \, d\mu$

donc $\left| \int_\Omega (f - f_n) \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f - f_n| \, d\mu$ (th. de comparaison)

Exemples :

* on prend l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{Card}) = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$
la fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$k \longmapsto \frac{1}{k^2}$ est mesurable

autre exemple :
sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{Card})$
$f_k(n) = \frac{1}{(n+1)^2 + \frac{1}{(k+1)^2}}$
$f_k \nearrow f$ avec $f(n) = \frac{1}{(n+1)^2}$

posons $f_n(k) = \frac{1}{k^2} \mathbb{1}_{k \leq n}$

(f_n) est une suite de fonctions mesurables, $\nearrow f$

$\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \int_\Omega f \, d\mu$ (th. de cv monotone)

donc $\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ (cela est vrai en fait pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$)

* sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda) = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$
$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$x \longmapsto 1 - x^{1/n}$

$\forall x \in \,]0,1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ et $f_n(0) = 1, \forall n$

donc f_n cv presque partout vers f

donc (th. de cv dominée) : $\int_\Omega f_n \, d\mu \to \int_\Omega f \, d\mu$

$\int_0^1 (1 - x^{1/n}) \, \lambda(dx) \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$

Notation : on notera souvent dx à la place de $\lambda(dx)$

III) Intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème : Continuité sous l'intégrale

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

i) $\forall u \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable

ii) pour presque tout x, $u \mapsto f(u,x)$ est continue en u_∞

iii) $\exists g$ positive intégrable / $\forall u \in \mathbb{R}, |f(u,x)| \leq g(x)$

Alors $F(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u,x)\,\lambda(dx)$ est définie en tout point $u \in \mathbb{R}$ et est continue en u_∞.

démonstration :

soit $(u_n) \to u_\infty$, il suffit de montrer que $F(u_n) \to F(u_\infty)$

$$F(u_n) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(u_n, x)}_{=:\, f_n(x)}\,\lambda(dx)$$

on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} f(u_\infty, x)$

donc (cv dominée) : $F(u_n) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(u_\infty, x)\,\lambda(dx) = F(u_\infty)$ $\square$

Exemple : Convolution

Soit f intégrable et φ continue bornée $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$

alors $u \mapsto (f * \varphi)(u) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(u-x) f(x)\,\lambda(dx)$

est continue bornée

Théorème : Dérivation sous l'intégrale

soit I intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $u_0 \in I$

Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

i) $\forall u \in I$, $f(u,.)$ intégrable

ii) pour p.t. x : $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$ existe

iii) $\exists\, g$ positive intégrable telle que $\forall u \in I$:

pour p.t. x : $|f(u,x) - f(u_0,x)| \leq g(x)|u - u_0|$

alors $F(u) := \int_{\mathbb{R}} f(u,x)\, \lambda(dx)$ est définie en tout $u \in I$,

est dérivable en u_0 et :

$$F'(u_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)\, \lambda(dx)$$

dém : si $(u_n) \to u_0$ avec $u_n \neq u_0, \forall n$

soit $\varphi_n(x) = \dfrac{f(u_n,x) - f(u_0,x)}{u_n - u_0}$.

par (ii) : $\varphi_n(x) \xrightarrow{p.s.} \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$

et pour p.t. x : (iii) $|\varphi_n(x)| \leq g(x)$

par CV dominée : $\dfrac{F(u_n) - F(u_0)}{u_n - u_0} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)\, \lambda(dx)$

quand $n \to \infty$

$\square$

Corollaire : Dérivation "globale" sous l'intégrale

On suppose :

i) $\forall u \in I$, $f(u,.)$ est intégrable

ii) pour p.t. x : $u \mapsto f(u,x)$ dérivable sur I

iii) pour p.t. x, $\forall u \in I$: $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq g(x)$ avec $g \geq 0$ intégrable

Alors $F(u) = \int f(u,x)\lambda(d$ [illegible]

dériv. sur I et

$F'(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\lambda$ [illegible]

<u>Exemple :</u> calcul de $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\frac{\sin t}{t}\,dt$ $(\lambda > 0)$

$$F'(\lambda) = \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda t}\sin t\,dt$$

$$= \left[+e^{-\lambda t}\cos t\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\cos t\,dt$$

$$= 1 + \left[\lambda e^{-\lambda t}\sin t\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda t}\sin t\,dt$$

donc $F'(\lambda) = -\dfrac{1}{1+\lambda^2}$

donc $F(\lambda) = C - \mathrm{Arctan}(\lambda)$

par convergence dominée : $F(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$

donc $F(\lambda) = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,\lambda$

Chap. 5 : Mesure produit et théorème de Fubini

On se donne deux espaces mesurés $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $(\Omega', \mathcal{B}, \nu)$.

Théorème:

Sur l'ensemble $\Omega \times \Omega'$, il existe une plus petite tribu $\mathcal{C}$ contenant tous les ensembles de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$. On note $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

Il existe une unique mesure notée $\mu \otimes \nu$ sur $\mathcal{C}$ telle que si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$
$\mu \otimes \nu (A \times B) = \mu(A) \times \nu(B)$.

Remarque: la signification de "plus petite tribu contenant les ensembles de la forme ..."

$\mathcal{C}$ est une tribu sur $\Omega \times \Omega'$ telle que : si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ alors $A \times B \in \mathcal{C}$

$\forall \mathcal{C}'$ ayant la même propriété : $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$

Remarque: on notera $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la tribu produit des $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ d fois

Définition: la mesure $\mu \otimes \nu$ définie dans le théorème ci-dessus s'appelle mesure produit, la tribu $\mathcal{C}$ s'appelle la tribu produit

Remarque: La mesure $\lambda \otimes \lambda$ sur $\mathbb{R}^2$ correspond à l'aire. La mesure $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda$ sur $\mathbb{R}^3$ correspond au volume.

Théorème de Fubini - Tonelli

Soit $f : \Omega \times \Omega' \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable positive. On définit les fonctions φ et ψ sur Ω et Ω' respectivement par :

$$\varphi(x) = \int_{\Omega'} f(x,y)\, d\nu(y) \quad , \quad \psi(y) = \int_{\Omega} f(x,y)\, d\mu(x) .$$

Ces fonctions sont mesurables positives et vérifient :

$$\int_{\Omega} \varphi(x)\, d\mu(x) = \int_{\Omega \times \Omega'} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_{\Omega'} \psi(y)\, d\nu(y) .$$

(ces quantités valent éventuellement $+\infty$).

Pour des fonctions positives, on peut toujours intervertir l'ordre des intégration.

Théorème de Fubini (ou Fubini - Lebesgue)

Soit $f : \Omega \times \Omega' \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ une fonction mesurable.

On définit les fonctions f_1 et f_2 sur Ω et Ω' respectivement par :

$$f_1(x) = \int_{\Omega'} |f(x,y)| \, d\nu(y) \quad , \quad f_2(y) = \int_{\Omega} |f(x,y)| \, d\mu(x) .$$

i) Si l'une des fonctions f_1 ou f_2 est intégrable alors l'autre aussi et f aussi et φ et ψ aussi et :

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \, d\mu(x) = \int_{\Omega \times \Omega'} f(x,y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_{\Omega'} \psi(y) \, d\nu(y)$$

$\underbrace{\text{ii) Si } f \text{ est intégrable alors}}$ $\begin{cases} \text{pour p.t. } y : f_1 \text{ est intégrable} \\ \text{pour p.t. } x : f_2 \text{ est intégrable} \end{cases}$ et on a l'égalité ci-dessus

Exemples :

* $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$(x,y) \longmapsto e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y \leq 1}$ est une fonction mesurable positive

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y) \underbrace{d(\lambda \otimes \lambda)(x,y)} = \int_0^1 \int_0^1 e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{x+y\leq 1} \, dx\,dy$$

⚠ que l'on notera aussi $dx\,dy$

$$= \int_0^1 e^{-x} \left(\int_0^1 e^{-y} \mathbb{1}_{x+y\leq 1} \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x} \left(\int_0^{1-x} e^{-y} \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x} \left(1 - e^{-(1-x)} \right) dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x} - e^{-1} \, dx$$

$$= 1 - e^{-1} - e^{-1}$$

$$= 1 - \frac{2}{e}$$

* intégrales triples, quadruples ... : on applique plusieurs fois le théorème de Fubini – si f positive :

$$\int_{[0,1]^3} f(x,y,z) \, d(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda)(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,z) \, dx\,dy\,dz$$

* contre-exemple : $f : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$

$\forall y > 0 : \int_{\mathbb{R}^+} f(x,y) \, dx = 0$ et $\forall x > 0 : \int_{[0,1]} f(x,y) \, dx = \dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$

(...)

<u>Définition :</u> Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Un difféomorphisme φ de U dans V est une bijection C^1 telle que φ^{-1} est C^1 aussi.

↳ càd les dérivées partielles existent et sont continues

<u>Définition :</u> Si φ difféomorphisme de U dans V (ouverts de $\mathbb{R}^d$)

↳ s'écrivant $\varphi(u_1,\dots,u_d) = (\varphi_1(u_1,\dots,u_d),\dots,\varphi_d(u_1,\dots,u_d))$

on appelle matrice jacobienne :

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(u_1,\dots,u_d) & \frac{\partial \varphi_d}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_d} & \cdots \quad \frac{\partial \varphi_d}{\partial u_d} \end{bmatrix}$$

Exemple : $\varphi : (u,v) \longmapsto \left(\underbrace{\frac{u+v}{2}}_{\varphi_1}, \underbrace{\frac{u-v}{2}}_{\varphi_2}\right)$

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

<u>Théorème de changement de variable :</u> (énoncé seulement dans $\mathbb{R}^2$)

Si F difféomorphisme $\Delta \to D$ (Δ et D deux domaines ouverts de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction intégrable sur D alors la fonction $(u,v) \longmapsto (f\circ F)(u,v)\,|\det J_F(u,v)|$ est intégrable sur Δ et :
($\in \Delta$)

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\Delta (f\circ F)(u,v)\,|\det J_F(u,v)|\,du\,dv$$

On a le cas particulier suivant.

Si les domaines Δ et D sont choisis tels que F est bijective $F : (\rho,\theta) \mapsto (\rho\cos\theta,$

<u>Théorème de changement de variables en coordonnées polaires</u>

Si $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ est intégrable sur D alors la fonction $(\rho,\theta) \mapsto f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est intégrable sur Δ et

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\Delta F(\rho,\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

<u>Exemples :</u>

* On va expliquer sur un exemple comment on effectue le passage coordonnées polaires. On veut calculer $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

$$\underset{\substack{\cap \\ ]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[}}{(\rho,\theta)} \xrightarrow{F} (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$$

est un difféomorphisme car dérivable % ρ et θ et $\frac{\partial F}{\partial \rho}, \frac{\partial F}{\partial \theta}$ sont continues on a donc :

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\,|\det J_F(\rho,\theta)|\,d\rho\,d\theta$$

or $J_F(\rho,\theta) = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta\end{bmatrix}$

donc $|J_F(\rho,\theta)| = |\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta| = \rho$

donc $$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2}\rho\,d\theta\,d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2}\,d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

or $$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \times \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)$$

donc : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

symétrie : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

* convolution

Soient f et g deux fonctions intégrables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Posons : $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy$. Montrons que c'est bien défini

↳ càd que $f*g < \infty$ p.p.

$$\int_{\mathbb{R}}|(f*g)(x)|dx = \int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy\right|dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f(y)| \times |g(x-y)|\,dy\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}}|f(y)|\underbrace{\int_{\mathbb{R}}|g(x-y)|\,dy}_{\substack{\text{" changement de variable } u \mapsto x-u \\ \int_{\mathbb{R}}|g(u)|du}}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}}|f(y)|dy \times \int_{\mathbb{R}}|g(u)|du < \infty$$ car f et g intégrables

donc $f*g<\infty$ p.p.

(par l'absurde : si $\lambda(\{x : f*g(x)=+\infty\})>0$

alors $\int |f*g(x)|\,dx=+\infty$)

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy \underset{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)\,du = g*f(x)$$

changement de variable $u\mapsto x-u$ — donc $f*g=g*f$

* <u>volume de la boule unité</u>

on note $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leq 1\}$

on veut calculer

$$(\lambda\otimes\lambda)(B)=\int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{1}_B(x,y)\,d(\lambda\otimes\lambda)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{1}_B(x,y)\,dx\,dy$$

Fubini – Tonelli

$$=\int_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_{y\in\mathbb{R}}\mathbb{1}_{x^2+y^2\leq 1}\,dy\right)dx$$

$$=\int_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

($x=\sin u$)

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2\cos u\cos u\,du$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2u+1\,du$$

$$=\left[\frac{\sin(2u)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}+\pi$$

$$=\pi$$

22b

* On veut calculer par un changement de variable $\displaystyle\int_{[0,+\infty[\times[0,+\infty[} e^{-(x+y)^2} e^{-(x-y)^2} \, dx\, dy = I$

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

$$\varphi : \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ u \geq 0, \ |v| \leq u\} \longrightarrow [0,+\infty[\times[0,+\infty[$$
$$(u,v) \longmapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

est bijective

Jacobienne : $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

$$I = \int_{\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/u\geq 0, |v|\leq u\}} e^{-u^2} e^{-v^2} \frac{1}{2} \, du\, dv$$

$$= \int_{u\in[0,+\infty[} \frac{e^{-u^2}}{2} \left(\int_{-u}^{u} e^{-v^2} dv \right) du$$

on pose $F(u) = \int_{-u}^{u} e^{-v^2} dv \overset{\text{symétrie}}{=} 2 \int_0^u e^{-v^2} dv$ $(u \geq 0)$

on a : $F'(u) = 2e^{-u^2}$

donc $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{4} F'(u) F(u) \, du = \left[\frac{1}{8} F(u)\right]_0^{+\infty}$

$$= \frac{1}{8} 2 \times \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{8}$$

PLUS SIMPLE : $\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+y)^2} e^{-(x-y)^2} dx\, dy$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(u, v) \mapsto (\ldots)$ est bijective

Chapitre 6 : Fondements de la théorie des probabilités

I) Définitions générales

<u>Déf</u> : On appelle espace probabilisé un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. On dit que $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés événements.

<u>Déf</u> : On appelle variable aléatoire toute application mesurable X d'un espace probabilisé Ω dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

<u>Exemple</u> :

Soit $\Omega = \{(i,j) \in \{1,\dots,6\} \times \{1,\dots,6\}\}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la mesure $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\{(i,j)\}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$ pour tout i,j.

On vérifie que $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{(i,j)\in\Omega} \frac{1}{36} = 1$ car $\#\Omega = 36$.

Ω représente l'ensemble des combinaisons que l'on peut obtenir en jetant un dé 2 fois

$\mathbb{P}(\{(i,j)\})$ est la probabilité que l'on obtienne i puis j.

$\mathbb{P}(\{(1,1),(2,2)\})$ est la probabilité d'avoir (1 et 1) ou (2 et 2).

$X : (i,j) \in \Omega \longmapsto i$ et $Y : (i,j) \in \Omega \longmapsto i+j$ sont deux variables aléatoires (respectivement : "premier tirage" et "somme des deux tirages")

$Z : (i,j) \in \Omega \longmapsto (i,j) \in \Omega$ est aussi une v.a.

Déf: Soit $X : \Omega \longrightarrow (E, \mathcal{A}')$ une v.a. On appelle loi de X la mesure $\mathbb{P}_X$ sur E définie sur tout $A \in \mathcal{A}'$ par : $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$

$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$$

$$= \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$

⚠ en général, on s'intéresse à la loi de X (et pas à la mesure $\mathbb{P}$)

Remarque: $\mathbb{P}_X$ est la mesure image de $\mathbb{P}$ par X (voir Chap. 2 pour la déf. de la mesure image)

$\mathbb{P}_X$ est une mesure de probabilité

Exemple: on reprend l'ex. précédent

loi de Y : $\mathbb{P}(Y=1) = 0$

$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}((i,j) = (1,1)) = \frac{1}{36}$

$\mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}((i,j) = (1,2) \text{ ou } (2,1)) = \frac{2}{36}$

$\mathbb{P}(Y=4) = \frac{3}{36}$ $\qquad \mathbb{P}(Y=9) = \frac{4}{36}$

$\mathbb{P}(Y=5) = \frac{4}{36}$ $\qquad \mathbb{P}(Y=10) = \frac{3}{36}$

$\mathbb{P}(Y=6) = \frac{5}{36}$ $\qquad \mathbb{P}(Y=11) = \frac{2}{36}$

$\mathbb{P}(Y=7) = \frac{6}{36}$ $\qquad \mathbb{P}(Y=12) = \frac{1}{36}$

$\mathbb{P}(Y=8) = \frac{5}{36}$

Déf: Fonction de répartition

Soit X v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle fonction de répartition de X la fonction de répartition associée à la mesure $\mathbb{P}_X$.

C'est à dire la fonction : $F_X : t \in \mathbb{R} \longmapsto F_X(t) = \mathbb{P}_X(]-\infty, t])$

$$= \mathbb{P}(X \leq t)$$

Théorème: Soit X une v.a. réelle (v.a.r.).

a) F_X est croissante

b) $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

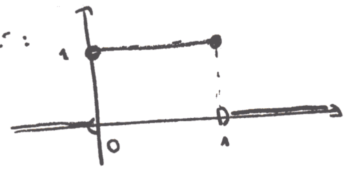
c) F_X continue à droite et $\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} F_X(t) = \mathbb{P}(X < t_0)$

F_X est continue en t_0 ssi $\mathbb{P}(X = t_0) = 0$

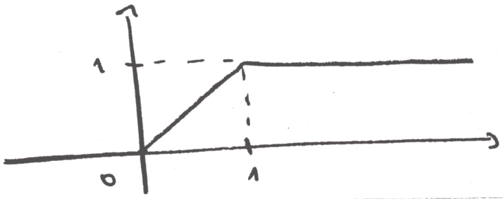
Exemples : Fonctions de répartition et densité

* X de densité $\mathbb{1}_{0 \le x \le 1}$

densité :



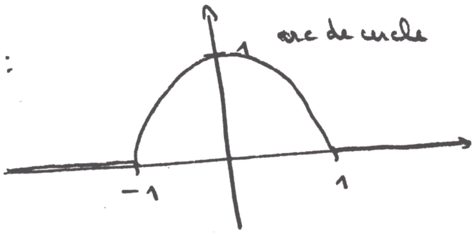
fonction de répartition :



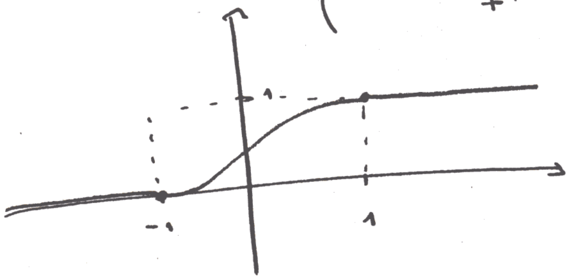
car si $t \in [0,1]$
$\mathbb{P}(X \le t) = t$
si $t \le 0$:
$\mathbb{P}(X \le t) = 0$
si $t \ge 1$:
$\mathbb{P}(X \le t) = 1$

* X de densité $\mathbb{1}_{x \in [-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,\frac{2}{\pi}$

densité :



fonction de répartition :
$\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Arcsin} x\right)\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}$



(sur $[-1,1]$, la primitive de $\sqrt{1-x^2}$ est $\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{2}$).

car
si $t \le -1$: $\mathbb{P}(X \le t) = 0$
si $t \in [-1,1)$: $\mathbb{P}(X \le t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \mathbb{1}_{x \in [-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,\frac{2}{\pi}\,dx$

$$= \int_{-1}^{t} \sqrt{1-x^2}\,\frac{2}{\pi}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Arcsin} x\right)\right]_{-1}^{t}$$

$$= \left(t\sqrt{1-t^2} + \operatorname{Arcsin} t\right)\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}$$

Déf : __densité d'une v.a.r.__ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$.

Soit X une v.a.V. On dit que X a une densité f_X si $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ on peut écrire : $\mathbb{P}(X \in B) = \int_{\mathbb{R}^d} f_X(x)\, \mathbb{1}_B(x)\, dx$ → mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

c'est à dire si $\mathbb{P}_X$ (mesure sur $\mathbb{R}$) a une densité f_X.

On a dans ce cas : $\forall t,\ F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\, du$

(ce qui ne veut pas dire que $F'_X = f_X$).

__Exemple :__ si X a une densité $e^{-x}\mathbb{1}_{x>0}$

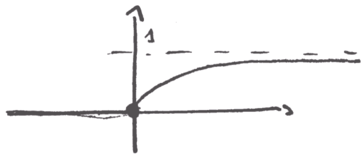
alors $\mathbb{P}(X \geq 1) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x}\mathbb{1}_{x>0}\mathbb{1}_{x\geq 1}\, dx$

$$= \int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty}$$

$$= 1 - e^{-1}$$

Dessin de la fonction de répartition :



II) __Espérance d'une v.a.__

__Déf :__ Soit X v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On note $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$

qui est bien définie dans les cas suivants :

- si $X \geq 0$ ($\mathbb{E}(X) \in [0, +\infty]$)
- si X de signe quelconque et $\int_\Omega |X(\omega)|\, dP(\omega) < \infty$

On dit que X est intégrable si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$.

__Proposition :__ Soit X v.a. à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. Soit f mesurable $(E, \mathcal{E}) \to [0, \infty]$. On a :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_E f(x)\, \mathbb{P}_X(dx).$$

Si de plus X (v.a.r.) a une densité g : $\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x)\, dx$

propriétés de l'espérance ce sont les mêmes que pour l'intég
- linéarité
- croissance

et si $X(\omega) = \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X) = \lambda$

__Exemples :__ * avec X de densité $e^{-x}\mathbb{1}_{x>0}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x e^{-x}\, dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$$

* si (U,V) dans $\mathbb{R}^2$ de densité $e^{-u^2}e^{-v^2}$

si f mesurable $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathbb{E}(f(U,V)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u,v)\, e^{-u^2}e^{-v^2}\, du\, dv$

<u>Def</u> : si X est une v.a.r. telle que X^2 est intégrable (càd $\mathbb{E}(X^2) < \infty$) alors on appelle variance de X et on note $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

<u>Proposition</u> : $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$

<u>dém</u> :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) &= \mathbb{E}(X^2 + \mathbb{E}(X)^2 - 2X\mathbb{E}(X)) \\ &= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) - 2\,\mathbb{E}(X\,\mathbb{E}(X)) \\ &= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)^2 - 2\,\mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\end{aligned}$$
$\square$

<u>Exemple</u> : X de densité $e^{-x}\mathbb{1}_{x>0}$
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx &= \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-x}\,dx \\ &= \left[-2x e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2 e^{-x}\,dx \\ &= 2\end{aligned}$$

$V(X) = 2 - 1^2 = 1$

<u>Calcul de loi et espérance</u> : La loi d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est uniquement déterminée par le calcul de $\mathbb{E}(f(X))$ pour toute f mesurable $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ positive.

<u>Proposition</u> : Soit X v.a.r. Si $\exists g \,/\, \forall \varphi$ mes. ≥ 0 $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) g(x)\,dx$ alors g est la densité de X

III) Inégalités

<u>Théorème</u> : <u>Inégalité de Jensen</u>

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. Soit X v.a.r. intégrable telle que $\varphi(X)$ est intégrable. Alors : $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$

<u>Théorème</u> : <u>Inégalité de Bienaymé - Tchebycheff</u>

Soit X v.a. positive, intégrable, si $\lambda > 0$ alors :
$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$
Si X^2 intégrable alors : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \dfrac{V(X)}{\lambda^2}$

Exemples : Calculs d'espérance

* X de densité $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x\geq 0}\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= 0 + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

* X à valeurs entières (dans $\{0, \dots, n\}$) : $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $(p \in [0,1])$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$(q = k-1)$

$$= \sum_{q=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{q!(n-1-q)!} p^{q+1} (1-p)^{n-1-q}$$

$$= \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q p^{q+1} (1-p)^{n-1-q}$$

$$= p \times (p + 1 - p)^{n-1}$$

$$= p$$

* X à valeurs dans $\mathbb{N}$

$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $(\lambda > 0)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\lambda^{q+1} e^{-\lambda}}{q}$$

$$= \lambda$$

Rappel : binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$$

* Soit X de loi de densité $\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ (sur $\mathbb{R}$). On cherche la loi de $aX+b$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$.

Soit f mesurable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\mathbb{E}(f(aX+b)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$\overset{y=ax+b}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{e^{-\left(\frac{y-b}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, a} dy$$

donc $(aX+b)$ a une loi de densité $\frac{e^{-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}}{a\sqrt{2\pi}}$

* Soit (X,Y) v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité $\frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{x^2+y^2 \leq 1}$.

Calculons la loi de $X+Y$.

Soit f mesurable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $F : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x+y) \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{E}(f(X+Y)) = \mathbb{E}(F(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x+y) \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy$$

$$\overset{\text{changement de variable}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f(u) \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{\frac{u^2+v^2}{2} \leq 1} du dv$$

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

$$\overset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(u)}{\pi} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{u^2+v^2 \leq 2} dv \right)}_{\substack{\shortparallel \\ 2\sqrt{2-u^2}\, \mathbb{1}_{|u| \leq 2}}} du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(u)}{\pi} 2\sqrt{2-u^2}\, \mathbb{1}_{|u| \leq 2} du$$

donc $X+Y$ a pour densité $\frac{2}{\pi}\sqrt{2-u^2}\, \mathbb{1}_{|u| \leq 2}$

démonstration :

$\forall \omega : X(\omega) \geq \lambda \mathbb{1}_{X(\omega)\geq\lambda}$

donc $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \geq \int_\Omega \lambda \mathbb{1}_{X(\omega)\geq\lambda}\, d\mathbb{P}(\omega)$

$$= \mathbb{E}(\lambda \mathbb{1}_{X\geq\lambda})$$

$$= \lambda \mathbb{P}(X \geq \lambda) \qquad \square$$

Théorème : Inégalité de Markov

Si X^2 intégrable et $\lambda > 0$: $\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{\lambda^2}$

démonstration :

$\mathbb{E}(X^2) = \int_\Omega X(\omega)^2\, d\mathbb{P}(\omega) \geq \int_\Omega \lambda^2 \mathbb{1}_{|X(\omega)|\geq\lambda}\, d\mathbb{P}(\omega)$

$$= \lambda^2 \mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \qquad \square$$

IV) Lois classiques

1) Lois discrètes

a) Loi uniforme : soit E ens. fini de cardinal n

X est une v.a. uniforme sur E si $\mathbb{P}(X=x) = \frac{1}{n}, \forall x \in E$

b) Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$:

X v.a. à valeurs dans $\{0, 1\}$ t.q. $\begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = p \\ \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}$

c) Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ ($n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$)

X à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ tq $\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

d) Loi géométrique de paramètre p ($p \in]0,1[$)

X à valeurs dans $\mathbb{N}$ tq $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)p^k$

e) Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$

X à valeurs dans $\mathbb{N}$ t.q. $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

2) Lois continues

X v.a. réelle de densité $p(x)$

a) Loi uniforme sur $[a,b]$ $(a<b)$: $p(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$

b) Loi exponentielle de par. $\lambda > 0$: $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$

c) Loi gaussienne (ou normale) $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $(m \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

V) Fonctions caractéristiques

Déf : Soit X v.a.r., la fonction caractéristique de X est ϕ_X : $\xi \in \mathbb{C} \longmapsto \phi_X(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \mathbb{P}_X(dx)$
$= \mathbb{E}(e^{i\xi X})$

Remarque : pour une fonction à valeurs complexes $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
on note $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} Re(f) \, d\mu + i \int_{\mathbb{R}} Im(f) \, d\mu$

et donc $\phi_X(\xi) = \int_{\mathbb{R}} Re(e^{i\xi x}) \mathbb{P}_X(dx)$
$+ i \int_{\mathbb{R}} Im(e^{i\xi x}) \mathbb{P}_X(dx)$

Lemme : Soit X de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$
alors $\phi_X(\xi) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}\right)$

dém : $\underbrace{\phi_X(\xi)}_{} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} e^{ix\xi} \, dx$
que l'on note $f(\xi)$ pour simplifier
on va supposer ici $\sigma = 1$

$$\int_{\mathbb{R}} Im\left(e^{-x^2/2\sigma^2} e^{ix\xi}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2\sigma^2} \sin(x\xi) \, dx = 0$$

reste : $\int_{\mathbb{R}} Re\left(e^{-x^2/2\sigma^2} e^{ix\xi}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2\sigma^2} \cos(x\xi) \, dx$

on dérive : (possible car la fonction ci-dessous est intégrable)

$$f'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} - \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x \sin(x\xi)\,dx$$

$$= \left[\frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sigma^2 \sin(x\xi) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sigma^2 \xi \cos(x\xi)\,dx$$

$$= -\xi f(\xi)$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\xi$$

donc $\log(f(\xi)) - \log(f(0)) = -\frac{\xi^2}{2}$

$$f(\xi) = f(0) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$$

on remarque que $f(0) = 0$

on a donc $\phi_X(\xi) = e^{-\xi^2/2}$ $\square$

<u>Théorème</u> : La fonction caractéristique d'une v.a.r. X caractérise la loi de cette v.a.

c'est à dire que si X et Y ont même f.c. alors X et Y ont même loi.

VI) Fonctions génératrices

Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$

<u>Déf</u> : on appelle alors fonction génératrice de X la fonction $g_X : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \mathbb{E}(x^X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)\, x^n$$

<u>Propriétés</u> : La fonction génératrice caractérise la loi de X.

<u>Ex</u> : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$g_X(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \frac{e^{\lambda u} e^{-\lambda}}{\cancel{n!}} = \frac{e^{-\lambda(1-u)}}{\cancel{n!}}$$

Chapitre 7 : Variables indépendantes

I) Définitions générales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Déf : On dit que $\overbrace{A_1, \dots, A_n}^{\text{famille finie ou non}} \in \mathcal{A}$ sont indépendants si $\forall \{j_1, \dots, j_p\} \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$:

$$\mathbb{P}(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_p}) = \mathbb{P}(A_{j_1})\,\mathbb{P}(A_{j_2}) \dots \mathbb{P}(A_{j_p})$$

Remarque : Il ne suffit pas que les A_i soient 2 à 2 indépendants.

Déf : Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans des espaces mesurables $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$.

On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si :

$$\forall F_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, \forall F_n \in \mathcal{E}_n, \quad \mathbb{P}(\{X_1 \in F_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in F_n\}) = \mathbb{P}(X_1 \in F_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in F_n)$$

Remarque : Il ne suffit pas que les X_i soient 2 à 2 indépendantes.

Théorème : Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables indépendantes (comme ci-dessus) alors $\begin{cases} \forall f_1 \text{ mesurable } E_1 \to \mathbb{R} \\ \vdots \\ \forall f_n \text{ mesurable } E_n \to \mathbb{R} \end{cases}$

on a : $\mathbb{E}(f_1(X_1) \dots f_n(X_n)) = \mathbb{E}(f_1(X_1)) \dots \mathbb{E}(f_n(X_n))$

Corollaire : Si X et Y v.a.r. indépendantes alors $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Théorème : Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a.r.

i) Si chaque X_i a une densité p_i et que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes alors $(X_1, \dots, X_n)$ a la densité :

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i).$$

ii) Si $(X_1, \dots, X_n)$ a une densité de la forme $p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} q_i(x)$ avec q_i mesurables, ≥ 0 alors $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $\forall i$ X_i a une densité $p_i = C_i q_i$ où $C_i > 0$ est constante.

Exemples : * Soit U une variable exponentielle de par. 1. Soit V unif. sur $[0,1]$ ind. de U. Soient $\begin{cases} X = \sqrt{U}\cos(2\pi V) \\ Y = \sqrt{U}\sin(2\pi V) \end{cases}$

Nous allons montrer que X et Y sont indépendantes.

$\forall \varphi$ mesurable, ≥ 0 $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$:

$$\mathbb{E}(\varphi(X,Y)) = \int_0^{+\infty}\int_0^1 \varphi(\sqrt{u}\cos(2\pi v), \sqrt{u}\sin(2\pi v))\, e^{-u}\, du\, dv$$

Changement de variable : anciennes variables $\begin{cases} u = r^2 \\ v = \dfrac{\theta}{2\pi} \end{cases}$ nouvelles variables $\begin{cases} r = \sqrt{u} \\ \theta = 2\pi v \end{cases}$

Matrice jacobienne : $\begin{bmatrix} 2r & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi} \end{bmatrix}$

Bijection : $\varphi : [0,+\infty[\times [0,2\pi] \longrightarrow [0,+\infty[\times [0,1]$

$(r,\theta) \longmapsto \left(r^2, \dfrac{\theta}{2\pi}\right)$

Donc : $\mathbb{E}(\varphi(X,Y)) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)\, \frac{r}{\pi}\, e^{-r^2}\, dr\, d\theta$

Changement de variable : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Bijection : $\varphi : [0,+\infty[\times [0,2\pi[\longrightarrow [0,+\infty[\times [0,2\pi[$

$(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

Matrice jacobienne : $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$

donc $r\, dr\, d\theta \rightsquigarrow dx\, dy$

Donc $\mathbb{E}(\varphi(X,Y)) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \varphi(x,y)\, \underbrace{\frac{e^{-(x^2+y^2)}}{\pi}}_{\text{produit d'une fonction de } x \text{ et d'une fonction de } y}\, dx\, dy$

Donc X et Y sont indépendantes.

II) Lemme de Borel - Cantelli

Théorème : (Lemme de Borel - Cantelli)

i) Soient $A_1, \dots, A_n, \dots$ une famille d'évènements telle que $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ converge. Alors :

$$\mathbb{P}(\{\omega, \omega \in \text{infinité de } A_n\}) = 0$$

ce qui s'énonce aussi : p.s., seul un nombre fini d'évènements A_n est réalisé.

ii) Si on a $A_1, \dots, A_n, \dots$ une famille d'évènements indépendants telle que $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Alors :

$$\mathbb{P}(\{\omega, \omega \in \text{infinité de } A_n\}) = 1$$

ce qui s'énonce aussi : p.s., une infinité d'évènements A_n est réalisé.

démonstration :

(i)

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{A_n}\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}) \quad (\text{car somme de variables} \geq 0$$

$$= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$$

donc la v.a. $Y = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{A_n}$ est finie p.s.

donc p.s. seul un nbre fini d'évènements A_n est réalisé

(ii)

$$\{\omega : \omega \in \text{infinité de } A_n\} = \{\omega : \forall n_0, \exists k \geq n_0 / \omega \in A_k\}$$

$$= \{\omega : \forall n_0, \omega \in \bigcup_{k \geq n_0} A_k\}$$

$$= \bigcap_{n_0 \geq 1} \left(\bigcup_{k \geq n_0} A_k\right)$$

soit n_0 fixé : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n_0}^{n} A_k^c\right) \underset{\downarrow}{\overset{\text{indépendance}}{=}} \prod_{k=n_0}^{n} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n_0}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_k))$

donc $\log \mathbb{P}\left(\bigcap^{n} A_k^c\right) = \sum^{n} \log(1 - \mathbb{P}(A_k))$

$$|\log(1-\mathbb{P}(A_k))| \geq \mathbb{P}(A_k)$$

donc série divergente

intersection décroissante : $\mathbb{P}(\bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k^c) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{k=n_0}^{n} A_k^c)$

$= 0$

et donc par réunion : $\mathbb{P}(\bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k^c) = 0$

on passe au complémentaire : $\mathbb{P}(\bigcap_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k) = 1$ [

III) Somme de v. a. indépendantes

Déf : Si μ et ν sont deux mesures sur $\mathbb{R}^d$, on définit $\mu * \nu$ par : $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z)\, \mu*\nu(dz) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)\, \mu(dx)\, \nu(dy)$
($\forall \varphi$ mes., ≥ 0)

(cette relation détermine complètement φ)

Déf : Si f et g sont mesurables, ≥ 0, $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ on définit la convolée de f et g par :

$$f*g(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, g(z-x)\, dx$$

Lemme : Si μ et ν sont deux mesures de proba. sur $\mathbb{R}^d$ de densités f et g alors $\mu*\nu$ est une mesure de proba. de densité $f*g$.

<u>Proposition:</u> Soient X et Y deux variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

i) La loi de $X+Y$ est $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$. Si X et Y ont des densités p_X et p_Y alors $X+Y$ a pour densité $p_X * p_Y$

ii) La fonction caractéristique de $X+Y$ est :
$$\Phi_{X+Y}(\xi) = \Phi_X(\xi)\,\Phi_Y(\xi).$$

iii) Si $d=1$, la fonction génératrice de $X+Y$ est :
$$g_{X+Y}(t) = g_X(t)\,g_Y(t).$$

<u>démonstration:</u>

(ii) $$\Phi_{X+Y}(\xi) = \mathbb{E}\left(e^{i\xi(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\xi X} e^{i\xi Y}\right) = \Phi_X(\xi)\,\Phi_Y(\xi)$$

(iii) $$g_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(t^{X+Y}\right) = \mathbb{E}\left(t^X t^Y\right) = \mathbb{E}(t^X)\,\mathbb{E}(t^Y) = g_X(t)\,g_Y(t)$$

$\square$

<u>Exemple:</u> Somme de gaussiennes.

* Si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma_2^2)$ indépendantes

Densité de $X+Y$: $$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_1^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x^2}{2\sigma_2^2} + \frac{2xz}{2\sigma_1^2} - \frac{z^2}{2\sigma_1^2}\right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)\left(x - \frac{\beta}{\sigma_1^2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)^{-1}\right)^2 - \frac{\beta^2}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\sigma_1^4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)^{-1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(\beta^2\left[-\frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_1^4}\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right]\right) \times \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)\left(x - \frac{\beta}{\sigma_1^2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)^{-1}\right)^2\right) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\left(\frac{-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+\sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)\right) \times \sqrt{2\pi \times \left(\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)$$

donc $X+Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

de même : si $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes

Donc $X+Y \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

* Autre méthode :

si $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ indépendants

$\Phi_X(\xi) = e^{i\xi m_1} e^{-\frac{\xi^2\sigma_1^2}{2}}$ et $\Phi_Y(\xi) = e^{i\xi m_2} e^{-\frac{\xi^2\sigma_2^2}{2}}$

donc $\Phi_{X+Y}(\xi) = e^{i\xi(m_1+m_2)} e^{-\frac{\xi^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}$

donc $X+Y \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

<u>Exemple :</u> si X et Y de loi $\mathcal{G}(p)$ indépendantes

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k \text{ et } Y=n-k)$$

↳ car év. disjoints

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k \text{ et } Y=n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\, \mathbb{P}(Y=n-k)$$

↳ indépendance

$$= \sum_{k=0}^{n} p^k (1-p)\, p^{n-k} (1-p)$$

$$= (1-p)^2 \sum_{k=0}^{n} p^n$$

$$= (n+1)\, p^n (1-p)^2$$

Chapitre 8 : Convergence de variables aléatoires

I) Les différentes notions de convergence

On se donne $(X_n)_{n\geq 0}$, X v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Def (Rappel) :

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} X$ (convergence presque sûre) si :

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\}) = 1$$

Def : soit $p \in [1, +\infty[$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X \text{ si } \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\|X - X_n\|^p) = 0$$

$\|\ldots\|$: norme sur $\mathbb{R}^d$

Def : on dit que la suite (X_n) converge en probabilité vers X et on note : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$ si $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\|X - X_n\| > \varepsilon) =$$

Def : On dit que (X_n) converge en loi vers X et on note $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$ si $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t)$ en tout t où F_X est continue

c'est à dire où $\mathbb{P}(X = t) = 0$.

(F_{X_n}, F_X fonctions de répartition)

Th : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$ si et seulement si $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$

pour toute fonction f continue bornée

Théorème :

i) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$

ii) $p \geq 1$. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$

iii) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X \Rightarrow \exists$ sous-suite X_{n_k} / $X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{p.s.} X$

iv) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$ ou $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$

diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\text{CV } L^p \arrow[r, Rightarrow] & \text{CV proba} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[r, dashed, Rightarrow, "\text{(suite extraite)}"'] & \text{CV p.s.} \arrow[l, Rightarrow, bend right] \\
 & \text{CV loi} &
\end{tikzcd}
$$

⚠ toutes les autres implications sont fausses

II) Lois des grands nombres

Théorème : Loi faible des grands nombres

Si $X_1, \dots, X_n, \dots$ sont des v.a.r. indépendantes et de même loi. Si $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$, on a :

$$\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \mathbb{E}(X_1).$$

démonstration :

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n) - \mathbb{E}(X_1)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{(X_1 - \mathbb{E}X_1) + \dots + (X_n - \mathbb{E}X_n)}{n}\right)^2\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \mathbb{E}\left((X_k - \mathbb{E}X_k)^2\right)$$

$$= \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \square$$

Théorème : Loi forte des grands nombres

Soit (X_n) suite de v.a.r. ind. et de même loi. Si $\mathbb{E}(|X_1|) <$

on a : $$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \mathbb{E}(X_1).$$

démonstration : on suppose de plus que $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$
(la démonstration avec les hypothèses minimale est plus difficile)

on veut montrer que $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \mathbb{E} X_1$

c'est à dire : $\frac{X_1 - \mathbb{E}X_1 + \dots + X_n - \mathbb{E}X_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} 0$

posons pour tout i : $X'_i = X_i - \mathbb{E} X_i$
on a alors $\mathbb{E}(X'_i) = 0$

$$\mathbb{E}\left(\left[\frac{X'_1 + \dots + X'_n}{n}\right]^4\right) = \frac{1}{n^4} \sum_{i_1, \dots, i_4 \in \{1, \dots, n\}} \mathbb{E}(X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3} X_{i_4})$$

ceci est nul dès que $i_1 \notin \{i_2, i_3, i_4\}$
ou $i_2 \notin \{i_1, i_3, i_4\}$
ou $i_3 \notin \{i_1, i_2, i_4\}$
ou $i_4 \notin \{i_1, i_2, i_3\}$

en effet : $\mathbb{E}(X'_1 X'^2_2 X'_5) = \mathbb{E}(X'_1)\mathbb{E}(X'^2_2)\mathbb{E}(X'_5) = 0$
(on voit ce qui se passe sur un exemple)

donc $$\mathbb{E}\left(\left[\frac{X'_1 + \dots + X'_n}{n}\right]^4\right) = \frac{1}{n^4}\left(n\,\mathbb{E}(X_1'^4) + 3n(n-1)\,\mathbb{E}(X_1'^2 X_2'^2)\right)$$
$$\leq \frac{C}{n^2}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\left[\frac{X'_1+\dots+X'_n}{n}\right]^4\right) < \infty$$

on a des variables ≥ 0 donc par Fubini - Tonelli, on peut intervertir les symboles $\sum$ et $\mathbb{E}$:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{X'_1+\dots+X'_n}{n}\right)^4\right) < \infty$$

donc p.s. : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{X'_1+\dots+X'_n}{n}\right)^4 < \infty$

c'est à dire que la série cv

le terme général d'une série convergente tend forcément vers 0

donc : $\frac{X'_1+\dots+X'_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$

III) Théorème central-limite

Déf: Soit (μ_n) une suite de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$, on dit que μ_n cv étroitement vers μ et on note $\mu_n \xrightarrow{(e)} \mu$ si $\forall \varphi$ continue bornée $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

$$\int \varphi \, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \varphi \, d\mu$$

Remarque: Si on a une suite (X_n) de v.a. dans $\mathbb{R}^d$:

$$(X_n) \xrightarrow{loi} X \iff \mathbb{P}_{X_n} \xrightarrow{(e)} \mathbb{P}_X$$

Déf : pour μ mesure (de proba) sur $\mathbb{R}^d$, on note $\hat{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{itx} \mu(dt)$ $(x \in \mathbb{R}^d$

(c'est une fonction) $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$

Théorème (Lévy)

Soit (μ_n) suite de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$:

$$\mu_n \xrightarrow{(\mathcal{L})} \mu \quad \text{ssi} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \hat{\mu}_n(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{\mu}(\xi)$$

ou de manière équivalente : si $(X_n)_{n\geq 0}$ des v.a. dans $\mathbb{R}^d$

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X \quad \text{ssi} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \Phi_{X_n}(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_X(\xi)$$

théorème : Si on a des lois sur $\mathbb{R}$: $\mu_n \xrightarrow{(\mathcal{L})} \mu \iff \forall a<b$ avec $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$ et $\mu_n([a,b]) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu([a,b])$

a peut $= -\infty$
b peut $= +\infty$
on peut prendre les bornes ouvertes ou fermées

Théorème Central-Limite

Soit (X_n) suite de v.a.r. indépendantes et de même loi avec $\mathbb{E}(X_1) = m$ et $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$ $(m, \sigma^2 < \infty)$.

Alors $$\frac{(X_1 + \dots + X_n) - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{loi}} X \text{ de loi } \mathcal{N}(0,1).$$

En particulier, vu le th. ci-dessus : $\mathbb{P}\left(a \leq \frac{X_1+\dots+X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) \to \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$

démonstration :

Posons $Y_n = X_n - m$. Soit $S'_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $Z_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S'_n}{\sigma\sqrt{n}}$.

$$\Phi_{Z_n}(t) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{itS'_n}{\sigma\sqrt{n}}}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}(Y_1 + \dots + Y_n)}\right)$$

$$= \Phi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n$$

On s'intéresse à la fonction $\Phi_{Y_1}(u) = \mathbb{E}(e^{iuY_1})$.

On a : $$\Phi'_{Y_1}(u) = \mathbb{E}(iY_1 e^{iuY_1})$$
$$\Phi''_{Y_1}(u) = \mathbb{E}(-Y_1^2 e^{iuY_1}).$$

Donc $$\Phi'_{Y_1}(0) = \mathbb{E}(iY_1) = 0$$
$$\Phi''_{Y_1}(0) = -\mathbb{E}(Y_1^2) = -\sigma^2.$$

On peut faire un DL en 0 :

$$\Phi_{Y_1}(u) = \Phi_Y(0) + \frac{u^2}{2}\Phi''_Y(0) + o(u^2)$$

$$= 1 - \frac{u^2\sigma^2}{2} + o(u^2)$$

donc : $$\Phi_{Z_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$= e^{n\log\left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$\xrightarrow[(n\to\infty)]{} \underbrace{e^{-t^2/\sigma^2}}_{\text{fonction caractéristique de } \mathcal{N}(0,1)}$$

□

<u>Ex :</u> <u>Les sondages</u>

On s'intéresse à la proportion de gens qui achètent de la lessive Ariel en France. On ne peut pas interroger toute la population ($N = c.10^7$) et on prend un échantillon de n personnes. On note $X_i = \mathbb{1}_{i \text{ achète Ariel}}$.

Les variables X_i sont supposées iid.

On a : $$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}(X_1) = \text{la proportion cherchée}$$

(par la loi des grands nombres)

en effet : $X_i = \begin{cases} 1 & \text{avec proba. } \mu \\ 0 & \text{———} \; 1-\mu \end{cases}$

$\mathbb{E}(X_i) = \mu$

Mais ce résultat est de peu d'intérêt si on ne sait pas quelle est la vitesse de convergence.

Grâce au théorème central-limite, on peut dire :

$$\frac{X_1+\dots+X_n}{n} - \mu = \frac{(X_1-\mu)+\dots+(X_n-\mu)}{n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \times \underbrace{Y_n}_{\text{v.a. qui tend en loi vers une gaussienne}}$$

donc $\frac{X_1+\dots+X_n}{n} - \mu$ de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$

Si on veut : $\underbrace{\mathbb{P}\left(\left| \frac{X_1+\dots+X_n}{n} - \mu \right| \geq 0{,}01 \right)} \leq 0{,}05$

$$= \mathbb{P}\left(\left| \frac{X_1-\mu+\dots+X_n-\mu}{\sqrt{n}} \right| \geq \sqrt{n}\,(0{,}01) \right) \leq 0{,}05$$

$$\overset{(*)}{\approx} \mathbb{P}\left(\underbrace{Y}_{\text{gaussienne } \mathcal{N}(0,1)} \geq \frac{\sqrt{n} \times 0{,}01}{\sigma} \right)$$

on trouve $\sqrt{n} \times \frac{0{,}01}{\sigma} = \underbrace{q_{0,05}}_{\text{disponible dans une table}}$

puis n le nombre de personnes à interroger

(*) pour savoir à partir de quand cette approximation est valide, se reporter au th. de Berry-Esseen (cf. Durrett, Probability : Theory and Examples)

<u>Th</u> : Si on note F_N la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$.
Si on a des (X_i) iid avec $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}X_i^2 = \sigma^2$, $\mathbb{E}|X_i^3| = \rho < \infty$
si F_n est la fonction de répartition de $\frac{X_1+\dots+X_n}{n}$:

alors : $|F_n(x) - F(x)| \leq \frac{3\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}$

Cas particulier : Théorème de Moivre

$X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ indépendantes

alors on sait que $S_n = X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$

c'est à dire : $\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k \, 2^{-n}$

Ici : $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 = 1/4$

par le TCL : si $a < b$, $\underbrace{\frac{1}{2^n} \sum_{\frac{n}{2} + a\sqrt{n} \leq k \leq \frac{n}{2} + b\sqrt{n}} C_n^k}$ $\xrightarrow[n \to \infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^b e^{-2x^2} dx$

car ceci $= \mathbb{P}\left(a \leq \frac{\left(S_n - \frac{n}{2}\right)}{\sqrt{n}} \leq b \right)$

$= \mathbb{P}\left(a \leq \frac{\left(X_1 - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(X_n - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}} \leq b \right)$

Chap. 9 : Conditionnement

I) Conditionnement discret

On se place toujours sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $B \in \mathcal{A}$ / $\mathbb{P}(B) > 0$. On rappelle :

Déf : $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Déf : Si X est une v.a. $\mathbb{E}(X|B) = \dfrac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_B)}{\mathbb{P}(B)}$

Déf : Soit X v.a.r. intégrable et Y une autre v.a. (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$)

On définit $\mathbb{E}(X|Y) = \varphi(Y)$

où $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$y \longmapsto \begin{cases} \mathbb{E}(X|Y=y) = \dfrac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y=y})}{\mathbb{P}(Y=y)} & \text{si } \mathbb{P}(Y=y) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ex : lancer de dé

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ et $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$

$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $X(\omega) = \omega$

$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \dots ?$

- si $\omega \in \{1, 3, 5\}$: $Y = 1$

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \frac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y=1})}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{\frac{1}{6}(1+3+5)}{\frac{3}{6}} = \frac{9}{3} = $$

- si $\omega \in \{2,4,6\}$: $Y=0$

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \frac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y=0})}{\mathbb{P}(Y=0)} = \frac{\frac{1}{6}(2+4+6)}{\frac{3}{6}} = \frac{12}{3} = 4$$

Définition : Soit Y v.a. à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.

On note $\underbrace{\sigma(Y)}_{\text{c'est une tribu}} = \{Y^{-1}(A), A \in \mathcal{E}\}$.

$\sigma(Y) \subset \mathcal{A}$

On dit d'une v.a. Z à valeurs dans $(E', \mathcal{E}')$ qu'elle est $\sigma(Y)$-mesurable

si $\forall A \in \mathcal{E}'$, $Z^{-1}(A) \in \sigma(Y)$.

Soit $\mathcal{B}$ tribu $\subset \mathcal{A}$, on dit que Z est $\mathcal{B}$-mes. si $\forall A \in \mathcal{E}'$, $Z^{-1}(A) \in \mathcal{B}$

Proposition : On a $\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|Y)|) \leq \mathbb{E}(|X|)$

Pour toute v.a. Z $\sigma(Y)$-mesurable et bornée

$\mathbb{E}(ZX) = \mathbb{E}(Z\, \mathbb{E}(X|Y))$.

II) Espérance conditionnelle

$\mathcal{B}$ représente une information

Théorème et définition :

Soit $\mathcal{B}$ une tribu $\subset \mathcal{A}$. Soit X v.a.r. intégrable.

$\exists!$ v.a.r. intégrable notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ telle que

$\forall B \in \mathcal{B}$, $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \mathbb{1}_B)$.

On a plus généralement, $\forall Z$ $\mathcal{B}$-mes. bornée :

$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) Z)$. (⚠ Cette définition coïncide avec le conditionnement discret)

Si $X > 0$ p.s. $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \geq 0$.

Déf : on notera $\mathbb{E}(X|\sigma(Y)) = \mathbb{E}(X|Y)$

Propriétés :

a) Si X est $\mathcal{B}$-mesurable : $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = X$

b) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y|\mathcal{B}) = \lambda \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + \mu \mathbb{E}(Y|\mathcal{B})$

c) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(X)$

d) $|\mathbb{E}(X|\mathcal{B})| \leq \mathbb{E}(|X| \,|\mathcal{B})$

donc $\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathcal{B})|) \leq \mathbb{E}(|X|)$

e) $X \geq X' \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \geq \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})$ p.s.

f) si $X \perp\!\!\!\perp Y$: $\mathbb{E}(XY|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})\mathbb{E}(Y|\mathcal{B})$

Proposition : (avec toujours $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$)

Si X v.a.r. et Y v.a.r. $\mathcal{B}$-mesurable : (v.a. intégrables)

$\mathbb{E}(YX|\mathcal{B}) = Y\,\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$

Proposition : si $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{A}$

alors pour toute v.a.r. intégrable X : $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)|\mathcal{B}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$

Exemples : * on reprend les v.a. du lancer de dé

$\mathbb{E}(Y.X|\sigma(Y)) = Y\,\mathbb{E}(X|Y)$

* si on ajoute la v.a : $Z \begin{cases} = 1 \text{ si } X \in \{1,3\} \\ = 2 \text{ si } X = 5 \\ = 3 \text{ si } X \in \{2,4\} \\ = 4 \text{ si } X = 6 \end{cases}$

la connaissance de Z implique la connaissance de Y

donc $\sigma(Y) \subset \sigma(Z)$

et $\mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(X|Z)}|Y) = \mathbb{E}(X|Y) \longrightarrow$ cette v.a. $\begin{cases} = 3 \text{ si } Y = 1 \\ = 4 \text{ si } Y = 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow$ cette v.a. $\begin{cases} = 2 \text{ si } Z = 1 \\ = 5 \text{ si } Z = 2 \end{cases} Y = 0$; $\; = 3 \text{ si } Z = 3 \;\} Y = 1$

On veut vérifier la formule de la dernière proposition.

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)|Y) = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)\mathbb{1}_{Y=0})}{\mathbb{P}(Y=0)} & \text{si } Y=0 \\[2ex] \dfrac{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)\mathbb{1}_{Y=1})}{\mathbb{P}(Y=1)} & \text{si } Y=1 \end{cases}$$

On calcule : $\dfrac{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)\mathbb{1}_{Y=0})}{\mathbb{P}(Y=0)} = \dfrac{2\times\frac{2}{6} + 5\times\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = 3$

$$\frac{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)\mathbb{1}_{Y=1})}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{3\times\frac{2}{6} + 6\times\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = 4$$

On trouve bien que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)|Y) = \mathbb{E}(X|Y)$.

Chap. 10 : Variables gaussiennes

I) Définitions et propriétés

Déf : X v.a. dans $\mathbb{R}^d$ est dite gaussienne si $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$

$\langle \xi, X \rangle$ est gaussienne dans $\mathbb{R}$

↳ produit scalaire $\leadsto \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix}$

Prop : La loi d'un vecteur gaussien X est entièrement déterminée $m = \mathbb{E}(X)$ et $\Sigma_X = ((\mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)))_{1 \leq i,j \leq d}$

et $\phi_X(u) = e^{i\langle u, m \rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma_X u, u \rangle} \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$

Remarques : * produit scalaire usuel

si $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$ et $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_d \end{pmatrix}$

$$\langle u, m \rangle = \sum_{i=1}^{d} u_i m_i$$

* espérance : $\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_d) \end{pmatrix}$

* Σ s'appelle la matrice de covariance → elle est symétrique

$$\mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Prop : Les v.a.r. $(X_1 \dots X_d)$ sont ind. $\Leftrightarrow$ Σ est diagonale

→ en particulier si $\mathbb{E}(X_i X_j) \neq \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$ dès que $i \neq j$

dém : $(\Leftarrow)$ on écrit $\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_d^2 \end{bmatrix}$ (les éléments de la diagonale sont forcément ≥ 0)

$$\underbrace{\phi_X(u)}_{\mathbb{E}(e^{i(u_1X_1 + \dots + u_dX_d)})} = \exp\left(i(u_1m_1 + \dots + u_dm_d) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 u_1 + \dots + \sigma_d^2 u_d)\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{d} e^{i u_1 m_1} e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 u_1}$$

$$= \prod^{d} \phi_{X_j}(u)$$

qui est la fonction caractéristique d'un produit de v.a. ind. $Y_1, \dots, Y_d$ de m̂ loi que $X_1, \dots, X_d$

donc $X_1, \dots, X_d$ sont indépendantes $\square$

__Prop__ : soit X vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^d$

* la loi de X a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ $\Longleftrightarrow$ $\forall u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ $\langle \Gamma u, u \rangle > 0$

* dans ce cas, la densité de X est :

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \langle \Gamma_X^{-1}(x-m), x-m\rangle\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Gamma_X)}}$$

II) Gaussiennes et espérances conditionnelles

__Théorème__ :

Soit $(Y_1, \dots, Y_n, X)$ un vecteur gaussien centré (càd d'espérance nulle). Alors $\mathbb{E}(X \mid \sigma(Y_1, \dots, Y_n))$ peut s'écrire :

$$\mathbb{E}(X \mid \sigma(Y_1, \dots, Y_n)) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \quad \text{(avec des } \lambda_j \text{ réels)}.$$

De plus pour toute fonction mesurable $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\mathbb{E}(h(X) \mid \sigma(Y_1, \dots, Y_n)) = \int_{\mathbb{R}} h(x) \frac{\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx$$

où $\begin{cases} \sigma^2 = \mathbb{E}\left(\left(X - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j\right)^2\right) \\ m = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \end{cases}$

__Remarque__ : comme expliqué dans le chapitre précédent, $\mathbb{E}(h(X) \mid \sigma(Y_1, \dots, Y_n))$ est une variable aléatoire qui s'écrit comme fonction de $Y_1 \dots Y_n$

Calcul des λ_i :

Notons $Z = \mathbb{E}(X \mid \sigma(Y_1, \ldots, Y_n))$.

On a $\underset{\forall i}{\wedge}$ $\mathbb{E}(ZY_i) = \mathbb{E}(XY_i) = \mathbb{E}(XY_i) - \underbrace{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y_i)}_{=0}$

$= \mathrm{Cov}(X, Y_i)$

et par ailleurs : $\mathbb{E}(ZY_i) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k Y_i Y_k\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{Cov}(Y_i, Y_k)$

Donc :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(Y_1, Y_1) & \cdots & \mathrm{Cov}(Y_1, Y_n) \\ \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(Y_n, Y_1) & \cdots & \mathrm{Cov}(Y_n, Y_n) \end{bmatrix}}_{= \Sigma_Y} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(X, Y_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{Cov}(X, Y_n) \end{bmatrix}$$

donc $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \Sigma_Y^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(X, Y_1) \\ \vdots \\ \mathrm{Cov}(X, Y_n) \end{bmatrix}$

Chap. 11 : Processus de Poisson

On s'intéresse au nombre de gens qui arrivent dans une boulangerie. On note $N(s,t]$ le nombre de gens qui arrivent dans l'intervalle de temps $(s,t]$.

On suppose que :

(i) si $t' > s' > t$, le nombre de gens qui arrivent dans $(s',t']$ est ind. du nombre de gens qui arrivent dans $(s,t]$

(ii) la loi de $N(s,t]$ dépend uniquement de la longueur $t-s$

(iii) $\mathbb{P}(N(0,h] = 1) = \lambda h + o(h)$

(iv) $\mathbb{P}(N(0,h] \geq 2) = o(h)$

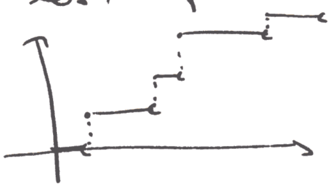
hypothèse technique qui peut être remplacée par " deux personnes n'arrivent pas en même temps et personne n'arrive en 0"

Théorème : Si on a (i) - ... - (iv) alors $\forall t$, $N(0,t]$ est de loi $\mathcal{P}(\lambda t)$. $\leadsto N_t = N(0,t]$ est un proc. de Poisson

démonstration : (partielle)

On note $T_1, \dots, T_n, \dots$ les temps de saut de $t \mapsto N(0,t]$

dessin de $t \mapsto N(0,t]$



Par convention : $T_0 = 0$.

On note $X_n = T_n - T_{n-1}$.

pour tout $n \geq 1$

$$\mathbb{P}(X_1 > t+s) = \mathbb{P}(N(0,t+s]=0)$$
$$= \mathbb{P}(N(0,t]=0, N(0,t+s] - N(0,t]=0)$$
$$= \mathbb{P}(\underbrace{N(0,t]}_{=N_t}=0)\,\mathbb{P}(N_{t+s}-N_t)=0)$$
$$= \mathbb{P}(X_1>t)\,\mathbb{P}(N_s=0)$$
$$\overset{(*)}{=} \mathbb{P}(X_1>t)\,\mathbb{P}(X_1>s)$$

On note $g(t+s) = \mathbb{P}(X_1 > t+s)$.

g est continue à droite et à cause de (*) on sait que g est forcément : $g(t) = e^{-\theta t}$ (paramètre θ)

en effet si g dérivable }

$$g(t+s) = g(t)g(s)$$
$$\frac{\partial}{\partial t} g(t+s) = g'(t)g(s)$$

$$g'(t+s) = g'(t)g(s)$$

en $t=0$: $g'(s) = g'(0)g(s)$

$$\frac{g'(s)}{g(s)} = g'(0)$$
$$\int_0^s \frac{g'(u)}{g(u)}\,du = s g'(0)$$
$$\log\left(\frac{g(s)}{g(0)}\right) = s g'(0)$$
$$g(s) = g(0) \quad e^{s g'(0)}$$

g est décroissante et $g(0)=1$ (par hypothèse) donc on a bien ce que l'on voulait

Donc $X_1 \sim \mathcal{E}(\theta)$.

$\mathbb{P}(X_2 > s \mid X_1 > t) =$

$\mathbb{P}(N_{t+s} \leq 1 \mid N_t = 0) =$

$$\frac{\mathbb{P}(N_{t+s} \leq 1 \text{ et } N_t = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 0)} =$$

$$\frac{\mathbb{P}(N_{t+s} - N_t \leq 1 \text{ et } N_t = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 0)} \stackrel{(ind.)}{=}$$

$$\frac{\mathbb{P}(N_{t+s} - N_t \leq 1)\,\mathbb{P}(N_t = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 0)} \stackrel{(\dots)}{=} \mathbb{P}(N_s \leq 1)$$

On en déduit que X_2 est ind. de X_1 et
(pas de dém. ici)
que X_2 a même loi que X_1.

Si on continue on arrive à montrer que les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont iid de loi $\mathcal{E}(\theta)$.

Calculons alors la loi de N_t.

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k \leq t < X_1 + \dots + X_{k+1})$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^+)^{k+1}} \mathbb{1}_{x_1 + \dots + x_k \leq t < x_1 + \dots + x_{k+1}} \theta^k e^{-\theta x_1} \dots e^{-\theta x_k} \, dx_1 \dots dx_k$$

$$= \theta^k \int_{x_1 \in [0,t]} e^{-\theta x_1} \int_{x_2 \in [0, t-x_1]} e^{-\theta x_2} \dots \int_{x_k \in [0, t - x_1 - \dots - x_{k-1}]} e^{-\theta x_k} \int_{x_{k+1} \in [t - x_1 - \dots - x_k, +\infty[} e^{-\theta x_{k+1}} \, dx_1 \dots dx_{k+1}$$

$$= \theta^k \int_{x_1 \in \dots} \dots \int_{x_k \in \dots} e^{-\theta x_1} \dots e^{-\theta x_k} e^{-\theta(t - x_1 - \dots - x_k)} dx_1 \dots dx_k$$

$$= \theta^k \int_{x_1 \in \dots} \dots \int_{x_k \in \dots} e^{-\theta t} dx_1 \dots dx_k$$

$$= \theta^k e^{-\theta t} \int_{x_1 \in \dots} \dots \int_{x_{k-1} \in \dots} (t - x_1 - \dots - x_{k-1}) dx_1 \dots dx_{k-1}$$

$$= \theta^k e^{-\theta t} \int_{x_1 \in \dots} \dots \int_{x_{k-2} \in \dots} \frac{(t - x_1 - \dots - x_{k-2})^2}{2} dx_1 \dots dx_{k-2}$$

$\vdots$ récurrence

$$= \frac{e^{-\theta t} (\theta t)^k}{k!}$$

□

<u>Théorème (réciproque)</u> :

Si on a $(X_n)_{n \geq 0}$ v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\theta)$ alors $N_t = \sup\{k : X_1 + \dots + X_k \leq t\}$ est un processus de Poisson de par. θ et vérifie (i) – (iv).

<u>démonstration:</u>

on vient de calculer la loi de N_t

pour l'indépendance de $N(t, t+s]$ et $N(0,t]$, c'est plus compliqué

□

Exemples :

* la boulangère s'absente entre t et t+s
calculer $\mathbb{P}($ un client arrive dans $]t, t+s])$

$$= \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t \geq 1)$$

$$= \sum_{k \geq 1} \frac{(s\theta)^k e^{-s\theta}}{k!} = 1 - e^{-s\theta}$$

* estimation du paramètre θ :

LDGN : $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \frac{1}{\theta} = \mathbb{E}(X_1)$

$$\frac{n}{X_1 + \dots + X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \theta$$

T-C-L : $\sqrt{n}\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{1}{\theta}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}(0, \underbrace{\mathrm{Var}\, X_1}_{= \frac{1}{\theta^2}})$

si on veut que : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{n}{X_1 + \dots + X_n} - \theta\right| > \varepsilon\right) \leq \delta$

il suffit : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{1}{\theta}\right| > \frac{1}{\theta - \varepsilon} - \frac{1}{\theta}\right) \leq \delta$

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{1}{\theta}\right| > \sqrt{n}\left(\frac{1}{\theta - \varepsilon} - \frac{1}{\theta}\right)\right) \leq \delta$$

ex : $\delta = 0,05$

$\varepsilon = 0,05$

$\theta = 1$

$\frac{1}{\theta - \varepsilon} - \frac{1}{\theta} \simeq 0,053$

il faut $\sqrt{n} \times 0,053 \geq 1,96$

$n \geq 1368$

Chap. 12 : Marches aléatoires

I) comportement général

Soient $X_1, \dots, X_n, \dots$ v.a. iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

On note $\begin{cases} S_n = X_1 + \dots + X_n \\ S_0 = 0 \end{cases}$. On suppose que $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$

<u>Théorème :</u> si $X_1, \dots$ v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'un des événements suivants arrive avec probabilité 1

i) $S_n = 0, \forall n$

ii) $S_n \to \infty$

iii) $S_n \to -\infty$

iv) $-\infty = \liminf S_n < \limsup S_n = \infty$

<u>dém :</u> on suppose que $\mathbb{P}(X_1 = 0) < 1$ (sinon on est dans le cas i)

* si $\mathbb{E}(X_1) \neq 0$: $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X_1)$

donc on est dans (ii) ou (iii)

* si $\mathbb{E}(X_1) = 0$

Notons $Z = \limsup S_n \in]-\infty, +\infty]$

Soit $S'_n = S_{n+1} - X_1$

S'_n a même loi que S_n, on note $Z' = \limsup_{n \to \infty} S'_n$

On a : Z' a même loi que Z

Or $Z' = Z - X_1$, donc $Z - X_1$ a même loi que Z.

Ce qui n'est pas possible si $Z < \infty$

donc $Z = +\infty$ □

Exemple : $X_0, X_1, \dots$ v.a.r. t.q. $\begin{cases} X_1 = 1 \text{ avec proba. } 1/2 \\ X_1 = -1 \text{ — } 1/2 \end{cases}$

on est ici dans le cas (iv)

II) Récurrence

Déf : $x \in \mathbb{R}^d$ est dit valeur récurrente de la marche S_n si $\mathbb{P}(\| S_n - x \| < \varepsilon \text{ i.s.}) = 1$ $\forall \varepsilon > 0$

Déf : soit $V = \{x \in$ valeurs récurrentes de $S_n\}$

si $V = \emptyset$, S_n est dite transiente (Remarque : $V = \emptyset \iff 0 \notin V$, $V \neq \emptyset \iff 0 \in V$)

si $V \neq \emptyset$, S_n — récurrente

Théorème : Les points suivants sont équivalents :

i) $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$ (où $\tau_1 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$)

ii) $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ i.s.}) = 1$

iii) $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n = 0) = \infty$ (Si on a l'un des trois, la suite est récurrente.)

démonstration :

On note $\tau_1 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$

et on définit par récurrence : $\tau_{n+1} = \inf\{k \geq \tau_n + 1 : S_k = 0$

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Si $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$ alors $\mathbb{P}(\tau_2 < \infty) = 1$, $\mathbb{P}(\tau_3 < \infty = 1)$, ...

Réunion dénombrable : $\mathbb{P}(\bigcup_{k \geq 1} \{\tau_k = \infty\}) = 0$

Passage au complémentaire : $\mathbb{P}(\bigcap_{k \geq 0} \{\tau_k < \infty\}) = 1$

$\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ i.s.}) = 1$

(ii) ⟹ (iii)

Soit $V = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{1}_{S_m=0}$ (= nombre de retours en 0)

$$\mathbb{E}(V) \underset{\text{Fubini - Tonelli}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_m = 0)$$

$\mathbb{E}(V) = \infty$ donc ~~on a~~ (iii)

(iii) ⟹ (i)

V = nbre de retours en $0 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\tau_n < \infty}$

Calcul :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_n < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_{n-1} < \infty, \tau_n < \infty) \\ &= \mathbb{P}(\tau_n < \infty \mid \tau_{n-1} < \infty) \times \mathbb{P}(\tau_{n-1} < \infty) \\ &= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)\, \mathbb{P}(\tau_{n-1} < \infty) \\ &\ \vdots \\ &= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^n\end{aligned}$$

Par Fubini - Tonelli :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(V) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau_n < \infty}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_n < \infty) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(\tau_1 < \infty)}_{\in [0,1]}{}^n\end{aligned}$$

On a $\mathbb{E}(V) = \infty$ donc $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$.

$\square$

Marche aléatoire simple dans $\mathbb{R}^d$:

C'est la marche aléatoire pour laquelle :

$\mathbb{P}(X_1 = (0, \dots, \underset{i^e \text{ pos.}}{1}, \dots, 0)) = \frac{1}{2d} \quad \forall i$

$\mathbb{P}(X_1 = (0, \dots, -1, \dots, 0)) = \frac{1}{2d} \quad \forall i$

Théorème :

La marche aléatoire simple est :

i) récurrente si $d=2$

ii) transiente si $d \geqslant 3$.

Démonstration :

On note $p_d(m) = \mathbb{P}(S_m = 0)$

(i) On sait que $p_2(m) = 0$ si m impair

(car pour revenir en 0, on doit faire le même nbr de pas à droite et à gauche
{en haut et en bas)

$$p_2(2n) = \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} C_{2n}^{m} C_{2n-m}^{n-m} C_{2n-(n-m+m)}^{m}$$

$$= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{m=0}^{n} \frac{(2n)!}{m!\, m!\,(n-m)!\,(n-m)!}$$

$$= \frac{1}{4^{2n}} \frac{(2n)!}{n!\,n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!\, n!}{m!\,m!\,(n-m)!\,(n-m)!}$$

$$= \frac{1}{4^{2n}} C_{2n}^{n} \underbrace{\sum_{m=0}^{n} C_n^m C_n^{n-m}}$$

manière de choisir n étudiants dans une classe de $2n$ où il y a n garçons et n filles

$$= \frac{1}{4^{2n}} C_{2n}^{n} \times C_{2n}^{n}$$

formule de Stirling : $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ $\rightsquigarrow$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} \underbrace{\frac{1}{4^{2n}} \frac{\left(\sqrt{2\pi \times 2n} \times (2n)^{2n} e^{-2n}\right)^2}{\left(\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}\right)^4}}$$

$$\text{"} \quad \frac{1}{\cancel{4^{2n}}} \frac{2\pi \times \cancel{2}n \times \cancel{2^{4n}}\, \cancel{n^{4n}}\, \cancel{e^{-4n}}}{4 \times \pi^2 \times n^2 \times \cancel{n^{4n}}\, \cancel{e^{-4n}}} = \frac{1}{\pi n}$$

donc $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_n=0)=\infty$

donc par le th. précédent, la marche est récurrente

<u>(ii)</u>

$p_3(m)=0$ si m impair.

$$p_3(2n)=\frac{1}{(2d)^{2n}}\sum_{j,k\in\{0,\dots,n\}} C_{2n}^{j}\,C_{2n-j}^{k}\,C_{2n-j-k}^{j}\,C_{2n-2j-k}^{k}\,C_{2n-2j-2k}^{n-j-k}$$

$$=\frac{1}{(2d)^{2n}}\sum_{0\leq j,k\leq n}\frac{(2n)!}{j!\,\cancel{(2n-j)!}}\times\frac{\cancel{(2n-j)!}}{k!\,\cancel{(2n-j-k)!}}\;\frac{\cancel{(2n-j-k)!}}{j!\,\cancel{(2n-2j-k)!}}$$

$$\times\frac{\cancel{(2n-2j-k)!}}{k!\,\cancel{(2n-2j-2k)!}}\;\frac{\cancel{(2n-2j-2k)!}}{(n-j-k)!\,(n-j-k)!}$$

$$=\frac{1}{6^{2n}}\sum_{0\leq j,k\leq n}\frac{(2n)!}{(j!\,k!\,(n-j-k)!)^2}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{n}\sum_{0\leq j,k\leq n}\left[\frac{1}{3^n}\,\frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!}\right]^2$$

or : $$\sum_{0\leq j,k\leq n}\frac{1}{3^n}\frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\frac{1}{3^n}C_n^j\,C_{n-j}^k$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{3^n}C_n^j\sum_{k=0}^{n-j}C_{n-j}^k$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{3^n}C_n^j\,2^{n-j}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^n\times\left(1+\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=1$$

Donc $$p_3(2n)\leq\frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{n}\times\max_{0\leq j,k\leq n}\frac{1}{3^n}\frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!}$$ le max est atteint en.

$$\leq\frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{n}\times\frac{1}{3^n}\,\frac{n!}{\left[\frac{n}{3}\right]!\,\left[\frac{n}{3}\right]!\,\left(n-2\left[\frac{n}{3}\right]-2\right)!}$$

Stirling :

$$\frac{n!}{\left(\left[\frac{n}{3}\right]!\right)^2 \left(n-2\underbrace{\left[\frac{n}{3}\right]}_{=k}-2\right)!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}}{\left(\sqrt{2\pi\left[\frac{n}{3}\right]}\left(\left[\frac{n}{3}\right]\right)^{\left[\frac{n}{3}\right]} e^{-\left[\frac{n}{3}\right]}\right)^2 \sqrt{2\pi(n-2k-2)}\,(n-2k-2)^{n-2k-2}\, e^{-(n-2k-2)}}$$

$$\underset{n\to\infty}{\geq}$$

$$C\,\frac{27\sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}}{2\pi n \times \left(\frac{n}{3}\right)^{2k} e^{-2k} \sqrt{2\pi}\sqrt{n-2k-2}\,(n-2k-2)^{n-2k-2}\, e^{-(n-2k-2)}}$$

$$\underset{n\to\infty}{\geq}$$

$$\frac{C}{n}\;\frac{\cancel{n^{n-2k}}\;\cancel{e^{-(n-2k)}}\;3^{2k}\;3^{(n-2k)}}{\cancel{n^{-k}}\;\cancel{e^{+(n-2}}}$$

$$\underset{n\to\infty}{\geq}$$

$$C\,\frac{3^n}{n}$$

donc le majorant de $p_3(2n) \underset{n\to\infty}{\sim} C \times \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}\, n}$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} C \times \frac{\sqrt{2n\times 2\pi}\,(2n)^{2n} e^{-2n}}{\left(\sqrt{n\pi}\, n^n e^{-n}\right)^2} \times \frac{1}{2^{2n}\, n}$$

$$= C \times \frac{\sqrt{n}\;\cancel{2^{2n}}\;\cancel{n^{2n}}\;\cancel{e^{-2n}}}{n\;\cancel{n^{2n}}\;\cancel{e^{-2n}}} \times \frac{1}{\cancel{2^{2n}}\, n}$$

$$= \frac{C}{n^2}$$

donc $\sum_{n\geq 0} p_3(n) < \infty$

donc par le th. précédent, la chaîne est transiente

$\square$