UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Master 2 MASS - Probabilités numériques - 2006-2007 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Devoir numéro 1

Vous devrez rendre un devoir papier et un programme (en C ou scilab) bien commenté éxécutant les calculs demandés.

Soient X_1, X_2 des variables aléatoires gaussiennes réelles avec $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = 1$ et $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Soit $Z = \lambda_1 e^{\beta_1 X_1} + \lambda_2 e^{\beta_2 X_2}$ ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 2$). On veut calculer $I = \mathbb{P}(Z \geq t)$ ($t = 500$).

1. Expliquer comment simuler (X_1, X_2).
2. Écrire une méthode de Monte-Carlo pour calculer I. Calculer la variance de cette méthode.
3. On remarque que I est de l'ordre de 10^{-3} (c'est ce qyue j'ai trouvé moi-même, si vous ne trouvez pas cet ordre de grandeur, passez cette question). Expliquer comment on trouve l'ordre de grandeur du nombre de tirages qu'il faut effectuer pour avoir $\frac{1}{2}10^{-3} \leq I \leq \frac{3}{2}10^{-3}$. Calculer cet ordre de grandeur.
4. En utilisant une technique de fonction d'importance, montrer que I peut s'écrire sours la forme :
$$I = \mathbb{E}(\phi(X_1, X_2)\mathbf{1}_{\lambda_1 e^{\beta_1(X_1+m)} + \lambda_2 e^{\beta_2(X_2+m)} \geq t})$$
ϕ étant une fonction que l'on précisera. (On peut aussi voir cette écriture comme un changement de variable.)
5. Proposer (en le justifiant, soit par un raisonnement, soit par un calcul numérique) un choix de m assurant que :
$$\mathbb{P}(\lambda_1 e^{\beta_1(X_1+m)} + \lambda_2 e^{\beta_2(X_2+m)} \geq t) \geq \frac{1}{4}.$$
6. Proposer une nouvelle méthode de Monte-Carlo pour évaluer I. Calculer la variance de cette méthode et la comparer à la variance de la méthode précédente.