UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Master 2 MASS - Probabilités numériques - 2006-2007 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Feuille d'exercices numéro 1

1. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Soient (R,θ) les coordonnées polaires de (X,Y). Montrer que R et θ sont indépendantes et calculer leur loi.
   (b) Soient U_1, U_2 sont des v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Soient :
   $$X_1 = \sqrt{-2\log(U_1)}\cos(2\pi U_2) X_2 = \sqrt{-2\log(U_1)}\sin(2\pi U_2)\ .$$
   Montrer que $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(0,1)\otimes\mathcal{N}(0,1)$.
   (c) Soient $(U_1^i, U_2^i)_{i\geq 0}$ des variables i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])\otimes\mathcal{U}([0,1])$. Soient $j = \inf\{i : (2U_1^i-1)^2 + (2U_2^i-1)^2 < 1\}$ et $(V_1,V_2) = (U_1^j, U_2^j)$. Quelle est la loi de (V_1, V_2) ?
   (d) Proposer un algorithme de rejet permettant de simuler une v.a. $\mathcal{N}(0,1)$ à partir de la loi double exponentielle de paramètre λ (c'est à dire de densité $(\lambda/2)\exp(-\lambda|x|)$).
2. Soit X v.a.r. de fonction de répartition F que l'on supposera inversible.
   (a) Comment simuler X conditionellement à $X > m$ à l'aide d'une méthode de rejet ? Évaluer l'efficacité de la méthode ? Que se passe-t-il quand m devient grand ?
   (b) Soit $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $Z = F^{-1}(F(m) + (1-F(m))U)$. Montrer que $Z \sim \mathcal{L}(X|X > m)$. Comparer cette méthode de simulation avec la précédente.
   (c) Comment simuler suivant $\mathcal{L}(X|a < X < b)$?
   (d) Supposons maintenant que l'on cherche à simuler suivant $\mathcal{L}(X|X > m)$ pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Montrer que l'on peut se rammener au cas $\mu = 0, \sigma = 1$.
   (e) Proposer une méthode de rejet (pour simuler suivant $\mathcal{L}(X|X > m)$) basée sur la loi de densité $\theta e^{-\theta(x-m)}\mathbf{1}_{x>m}$. Comment choisir θ de manière optimale ?
3. On veut évaluer $I = \int_{\mathbb{R}} f(x)p(x)dx$ par une méthode de Monte-Carlo en simulant un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de densité p par la méthode du rejet. On a une densité q vérifiant $p \leq Mq$. On simule des variables Z_i suivant q, on note $X_1, ..., X_n$ celles que l'on garde (et qui ont donc une loi p) et $Z_1, ..., Z_{N-n}$ celles que l'on rejette. Le nombre n est fixé et N est le nombre de variables qu'on a dû simuler pour récupérer n variables de loi de densité p.
   (a) Loi de N ?
   (b) Loi de $(Z_1, \dots, Z_{N-n})$ conditionellement à $N - n = k$?
   (c) Montrez que
   $$\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f(X_i) + \sum_{i=1}^{N-n}\frac{(M-1)p(Z_i)}{Mq(Z_i)-p(Z_i)}f(Z_i)\right)$$
   est un estimateur sans biais de $\mathbb{E}(f(X_1))$ (c'est à dire que son espérance est $\mathbb{E}(f(X_1))$).