UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2006-2007
Sylvain Rubenthaler

Partiel - lundi 20 novembre 2006

Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. Calculer les limites suivantes.
   (a) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx$
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n}{x\sqrt{x}} \left(\sin\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right) dx$
2. Soit X variable aléatoire réelle de densité $x \mapsto 2e^{-2x}\mathbf{1}_{x\geq 0}$. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.
3. On définit pour $y \in [0,1]$,
$$F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{y}{x} \sin(yx) dx \ .$$
   Montrer que F est dérivable et exprimer F' sous forme d'une intégrale.
4. Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1/2$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{\omega : 1 = X_1(\omega) = X_2(\omega) = \dots = X_n(\omega)\}$. On remarque que $\forall n$, $A_{n+1} \subset A_n$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(A_n)$, $\forall n$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(\cap_{n\geq 1} A_n)$.
5. Soit (X,Y) variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ de densité $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto (x+y)e^{-x}e^{-y}$. Soient $U = \sqrt{XY}$, $V = \sqrt{Y/X}$. La variable (U,V) est également à valeurs dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
   (a) Calculer la densité de la loi de (U,V) (on pourra faire un changement de variable en $u = \sqrt{xy}, v = \sqrt{y/x}$).
   (b) Calculer la densité de la loi de V.