UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2006-2007 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
`http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Feuille d'exercices numéro 10

1. Soit $\delta > 0$ et Y de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(Y > \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\delta^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}(-e^{-\frac{x^2}{2}})dx$. En déduire une intégration par parties de cette intégrale qui donne que $\mathbb{P}(Y > \delta) = \frac{1}{\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2}}$ − (intégrale positive). En déduire que
   $$\mathbb{P}(Y > \delta) \leq \frac{1}{\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2}}.$$
   (b) On remarque que $\mathbb{P}(Y > \delta) = \int_\delta^{+\infty} y \left(\frac{1}{y} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right) dy$. Déduire de la question précédente que $\mathbb{P}(Y > \delta) \geq \delta \int_\delta^{+\infty} F(y)dy$ avec $F(y) = \int_y^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$.
   (c) Intégrer par parties $\int_\delta^{+\infty} 1 \times F(y)dy$ (en intégrant le 1 et dérivant le F) pour trouver
   $$\int_\delta^{+\infty} 1 \times F(y)dy = -\delta \int_\delta^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx + \frac{e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$
   (d) En déduire que
   $$\mathbb{P}(Y > \delta) \geq \frac{1}{\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right)} \frac{e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$
2. On rappelle que la somme de deux variables gaussiennes indépendantes, respectivement de lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ est une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Soient $X_1, X_2, X_3, \dots$ des variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On suppose que l'on connaît σ mais pas m, que l'on veut estimer par $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.
   (a) Montrer que $\sqrt{n}\left(\frac{S_n - m}{\sigma}\right)$ est (exactement) de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   (b) Déduire de l'exercice précédent que
   $$\forall \delta > 0,\ \mathbb{P}\left(m - \delta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq S_n \leq m + \delta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\delta} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2}\right)$$
   (c) En déduire que
   $$\forall \epsilon > 0,\ \mathbb{P}(m - \epsilon \leq S_n \leq m + \epsilon) \geq 1 - \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \frac{\sigma}{\epsilon} \exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{2\sigma^2}\right).$$
   (d) On suppose que $\epsilon = 0.01$, $\sigma = 1$, $n = 10000$, minorer $\mathbb{P}(|S_n - m| \leq \epsilon)$ par une valeur numérique.