

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 3

- Les ensembles  $[n, n + \frac{1}{2^n}[$  sont 2 à 2 disjoints donc  $\lambda(A) = \sum_{n \geq 0} \lambda([n, n + \frac{1}{2^n}[) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = 2$ .
- (a)  $\forall \epsilon > 0, \{x\} \subset [x, x + \epsilon]$  donc  $\lambda(\{x\}) \leq \lambda([x, x + \epsilon]) = \epsilon$ . Donc  $\lambda(\{x\}) = 0$ .  
 (b)  $\lambda(\cup_{n \geq 0} \{x_n\}) \leq \sum_{n \geq 0} \lambda(\{x_n\}) = 0$  par la question précédente.  
 (c)  $\mathbb{Q}$  est dénombrable donc on peut écrire  $\mathbb{Q} = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$  donc  $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$  par la question précédente.
- (a) On remarque que

$$\begin{aligned} A_n &= \{[x, x + 10^{-n}[ : x = 0, u_1 \dots u_n \text{ avec } u_1, \dots, u_n \in \{1, 5\}\} \\ &= \bigcup_{x \in B_n} [x, x + 10^{-(n+1}[ \end{aligned}$$

où  $B_n = \{x = 0, u_1 \dots u_n \text{ avec } u_1, \dots, u_n \in \{1, 5\}\}$ . On remarque que  $B_n$  est fini et que les intervalles  $([x, x + 10^{-n}[)_{x \in B_n}$  sont 2 à 2 disjoints. Donc :

$$\begin{aligned} \lambda(A_n) &= \sum_{x \in B_n} \lambda([x, x + 10^{-n}[) \\ &= \text{Card}(B_n) \times 10^{-n} = 2^n \times 10^{-n} . \end{aligned}$$

- (b)  $\forall n, A_n \subset A_{n+1}$  donc par intersection décroissante :  $\lambda(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(A_n) = 0$ .
- (a)  $\mu([0, 1]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^1 1 dx = 1$   
 $\mu([0, 2]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,2]}(x) \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^1 1 dx = 1$   
 $\mu([0, 1/2]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1/2]}(x) \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^{1/2} 1 dx = 1/2$   
 $\mu(\{1/2\}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{1/2\}}(x) \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{1/2\}}(x) dx = 0$  car  $\lambda(\{1/2\}) = 0$   
 (b)  $\mu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{x>0}(x) e^{-x} dx = 1$   
 $\mu(\{1\}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{1\}}(x) \mathbf{1}_{x>0}(x) e^{-x} dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{1\}}(x) e^{-1} dx = 0$  car  $\lambda(\{1\}) = 0$   
 $\mu([0, 1]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \mathbf{1}_{x>0}(x) e^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}$   
 $\mu([1, +\infty[) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[1,+\infty]}(x) \mathbf{1}_{x>0}(x) e^{-x} dx = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1}$   
 (c)  $\mu([0, 1]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \mathbf{1}_{x>0}(x) x e^{-x^2/2} dx = \int_0^1 x e^{-x^2/2} dx = [-e^{-x^2/2}]_0^1 = (1 - e^{-1/2})$