UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2006-2007 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 4

1. (a) $\forall x \in]0,1]$, $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(1/nx)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable sur $[0,1]$. $\forall x \in]0,1]$, $\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(1/nx) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par convergence dominée $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{nx}\right)dx = 0$

   (b) $\forall x \in [0,1]$, $\left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right| \leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0,1]$. On a $\forall x \in [0,1]$, $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \exp(n\log(1-\frac{x}{n})) = \exp(n(-x/n + o(1/n))) = \exp(-x + o(1)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-x}$ par continuité de la fonction exponentielle. Donc par convergence dominée,
$$\int_0^1 \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 e^{-x}dx = 1\ .$$

   (c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}| \leq \frac{1}{(1+x^2)}$ qui est une fonction intégrable sur $]-\infty,+\infty[$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1+x^2)}$ car $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc par convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)}dx = [\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi\ .$$

   (d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|} \leq e^{2-|x|}$ qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{1-|x|}$ donc par convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1-|x|}dx = 2e^1\ .$$

   (e) $\forall x \geq 0$, $\arctan(x/n)e^{-x} \leq (\pi/2)e^{-x}$ qui est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$.$\forall x \geq 0$, $\arctan(x/n)e^{-x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\arctan(x/n)e^{-x}dx = 0\ .$$

2. (a) On a pour $0 \leq x \leq n$, $f_{n+1}(x)/f_n(x) = \exp(g_n(x))$.
$$g_n'(x) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{x}{(1-x/n)(1-x/(n+1))} \geq 0$$
pour $0 \leq x \leq n$ donc g_n croissante sur $[0,n]$. $g_n(0) = 0$ donc $g_n(x) \geq 0$ $\forall x \in [0,n]$. Donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ $\forall x \in [0,n]$. C'est également vrai sur $[n,+\infty]$ donc f_n suite de fonctions croissante.

   (b) On a $\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. $\forall x \geq 0$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-x+\alpha x}dx$ donc par convergence monotone, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x+\alpha x}dx$, donc :
$$I(\alpha)\begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{-1+\alpha} & \text{sinon .}\end{cases}$$

3. (a) Pour tout n, k, $0 \leq \frac{1}{3^n}\left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right) \leq \frac{1}{3^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Pour tout n, $\frac{1}{3^n}\left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3^n}$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}\left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right)\right] = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n} = \frac{3}{2} \ .$$

   (b) Pour tout n, k, $\left|\frac{\sin(n/k)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Pour tout n, $\frac{\sin(n/k)}{2^n} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(n/k)}{2^n}\right] = 0 \ .$$

4. Inégalité de Jensen.

   (a) $\forall z, y \in I$ avec $z \leq y$, $\phi(y) - \phi(z) = \int_z^y \phi'(t)dt \geq \int_z^y \phi'(z)dt$ (car ϕ convexe), donc $\phi(y) - \phi(z) \geq \phi'(z)(y - z)$

   (b) On prend $z = \int_E f(t)d\mu(t)$ et $y = f(x)$ dans l'inegalité précédente et on a :

$$\phi(f(x)) \geq \phi\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right) + \phi'\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right)(y - z) \ .$$

   On intègre ensuite par rapport à $d\mu(x)$:

$$\begin{aligned}
\int \phi(f(x))d\mu(x) &\geq \int \phi\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right)d\mu(x) + \int \phi'\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right)(y - z)d\mu(x) \\
&= \phi\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right) + \phi'\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right)\left(\int f(x)d\mu(x) - \int f(x)d\mu(x)\right) \\
&= \phi\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right) \ .
\end{aligned}$$

   (c) La fonction $\phi : x \in [0, 1] \mapsto x^2$ est convexe. Donc par le résultat précédent, pour toute fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ intégrable,

$$\left(\int_0^1 |f(x)|dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx.$$