

Feuille d'exercices numéro 4
Intégrales et limites d'intégrales

1. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) dx$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} dx$

(d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^2(x)} e^{-|x|} dx.$

(e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(x/n) e^{-x} dx$

2. On pose : $I(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathbf{1}_{x \leq n}$. Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de fonctions. (On pourra notamment étudier : $g_n(x) = (n+1) \ln\left(1 - \frac{x}{n+1}\right) - n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.)

(b) En déduire la valeur de $I(\alpha)$ en fonction de α .

3. Soit μ la mesure de comptage ("Card") sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pour toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$, on a : $\sum_{n \geq 0} u_n = \int_{\mathbb{N}} u_n d\mu$.

(a) Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right) \right]$.

(b) Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n/k)}{2^n} \right]$.

4. Inégalité de Jensen.

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré avec $\mu(E) = 1$. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ convexe et dérivable deux fois (et donc $\phi'' \geq 0$). Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré avec $\mu(E) = 1$. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable et telle que $\int_E f(x) d\mu(x) < +\infty$.

(a) Montrer que $\forall z, y \in I$ avec $z \leq y$, $\phi(y) \geq \phi(z) + \phi'(z)(y - z)$

(b) En prenant $z = \int_E f(t) d\mu(t)$ et $y = f(x)$ dans l'inégalité précédente, montrer que :

$$\phi\left(\int_E f(x) d\mu(x)\right) \leq \int_E \phi \circ f(x) d\mu(x).$$

(c) En déduire que pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 |f(x)| dx < +\infty$:

$$\left(\int_0^1 |f(x)| dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx.$$