UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2006-2007 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 8

1. (a)

$$\begin{aligned} F(t)=\mathbb{P}(\sup(U,X)\leq t) &= \mathbb{P}(U\leq t, X\leq t) \\ \text{(indépendance)} &= \mathbb{P}(U\leq t)\mathbb{P}(X\leq t) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t\leq 0 \\ t(1-e^{-t}) & \text{si } t\in]0,1[\\ 1-e^{-t} & \text{si } t>1 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) On remarque que F est continue et qu'elle a un point anguleux en 1.

2. (a)

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(X_n))-\mathbb{E}(f(X))| &\leq \mathbb{E}(|f(X_n)-f(X)|) \\ &\leq C\mathbb{E}(\inf(1,|X_n-X|)) \end{aligned}$$

Pour p.t. ω, $\inf(1,|X_n(\omega)-X(\omega)|)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ et $\forall\omega$, $\inf(1,|X_n(\omega)-X(\omega)|)\leq 1$. Donc par théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}(\inf(1,|X_n-X|)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Donc $|\mathbb{E}(f(X_n))-\mathbb{E}(f(X))|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

(b) $\mathbb{P}(|f(X_n)-f(X)|\geq\epsilon)\leq\frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}(|f(X_n)-f(X)|)$ (inégalité de Bienaymé-Tchebycheff)

3. (a)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N) &= \sum_{n\geq 0} n\frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 1} n\frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \\ &= (\lambda T)e^{-\lambda T}\sum_{k\geq 0}\frac{(\lambda T)^k}{k!} \\ &= \lambda T \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N\geq m+p) &= \mathbb{P}(\text{ on a grillé plus de } m+p \text{ ampoules dans } [0,T]) \\ &= \mathbb{P}(\text{les } m+p \text{ premières ampoules ont déjà grillé quand on arrive en } T\ ) \\ &= \mathbb{P}(X_1+\dots+X_{m+p}<T) \end{aligned}$$

(c) On remarque que $\mathrm{Var}(X_1)=1/\lambda^2$, $\mathbb{E}(X_1)=1/\lambda$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N\geq m+p) &= \mathbb{P}(X_1+\dots+X_{m+p}\leq T) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1-\mathbb{E}(X_1)+\dots+X_{m-1+p}-\mathbb{E}(X_{m+p})}{(1/\lambda^2)\sqrt{m+p}}<\frac{T-(m+p)/\lambda}{(1/\lambda^2)\sqrt{m+p}}\right) \\ \text{(TCL)} &\approx \int_{-\infty}^{\frac{T-(m+p)/\lambda}{(1/\lambda^2)\sqrt{m+p}}}\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt\ . \end{aligned}$$

On calcule $\frac{T-(m-1+p)/\lambda}{(1/\lambda)\sqrt{m-1+p}} = -1$. On a par parité :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt &= \int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{1} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \\
\text{(d'après la table)} \quad &= 1 - 0,8413 = 0.1587 \ .
\end{aligned}$$

(d) Ici, on cherche p pour que $\mathbb{P}(N \geq m+p) \leq 0.05$. Comme avant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N \geq m+p) &\underset{\text{TCL}}{\approx} \int_{-\infty}^{\frac{T-(m+p)/\lambda}{(1/\lambda^2)\sqrt{m+p}}} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{-\frac{T-(m+p)/\lambda}{(1/\lambda^2)\sqrt{m+p}}} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \ .
\end{aligned}$$

On regarde la table et on voit qu'il faut prendre $-\frac{T-(m+p)/\lambda}{(1/\lambda^2)\sqrt{m+p}} \geq 1.65$. Une rapide étude de fonction montre qu'il faut prendre $m+p \geq 29$.