UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2007-2008
Sylvain Rubenthaler, http://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de l'examen - mardi 11 décembre 2007.

Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. (a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \geq t+u | Z \geq t) &= \frac{\mathbb{P}(Z \geq t+u, Z \geq t)}{\mathbb{P}(Z \geq t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(Z \geq t+u)}{\mathbb{P}(Z \geq t)}\end{aligned}$$

car $\{Z \geq t+u\} \subset \{Z \geq t\}$.

(b) On dérive par rapport à u puis on fait $u = 0$ dans la réponse précédente.

2. Soit $f \in C_b^+\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(U)) &= \mathbb{E}(f(Z+Y)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x+y)\mathbf{1}_{x\geq 0} e^{-x}\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dxdy\ .\end{aligned}$$

Changement de variable $u = x+y, v = y$. D'où $x = u - v$, $y = v$. Matrice jacobienne

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

de déterminant $= 1$. Les variables u, v parcourent $\mathbb{R}^2$ quand x, y parcourent $\mathbb{R}^2$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(U)) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(u)\mathbf{1}_{u-v\geq 0} e^{-(u-v)}\frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dudv \\ \text{(Fubini-Tonelli)} \quad &= \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-u}\left(\int_{-\infty}^{u} e^{v}\frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dv\right) du\ .\end{aligned}$$

Calculons (changement de variable $w = v - 1$)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{u} e^{v}\frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dv &= \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(v-1)^2/2} e^{1/2} dv \\ &= \int_{-\infty}^{u-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2} e^{1/2} dw\end{aligned}$$

Donc la densité de $Z + Y$ est $u \mapsto e^{-u+1/2}G(u-1)$.

3. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \geq n) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - \mathbb{E}(X_1) + \dots + X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sqrt{n}} \geq \frac{n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - \mathbb{E}(X_1) + \dots + X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sqrt{n}} \geq \frac{25-20}{5}\right) \\ \text{(th. central-limite)} \quad &\approx \mathbb{P}(Z \geq 1) \\ \text{(d'après la table)} \quad &\approx 1 - 0,86433 = 0,13567\ .\end{aligned}$$

4. (a) On le montre par récurrence.
   - C'est vrai en $n = 0$.
   - Si c'est vrai jusqu'en $n - 1$.

$$\begin{aligned}\log(W_n) &= \log(ap + (1-p)V_n) + \log(W_{n-1}) \\ &= \log(ap + (1-p)V_n) + \log(W_0) + \sum_{k=0}^{n-2} \log(ap + (1-p)V_k)\ .\end{aligned}$$

   (b) Nous avons $\mathbb{E}(|\log(ap + (1-p)V_1)|) \leq |\log(ap)| + \mathbb{E}(|\log(1 + \frac{(1-p)V_1}{ap})|) \leq |\log(ap)| + \mathbb{E}(V_1)|\frac{(1-p)}{ap}|$. Donc $\mathbb{E}(|\log(ap + (1-p)V_1)|) < \infty$. D'où le résultat par la loi des grands nombres (et parce que $\log(W_0) = 0$).

   (c) Pour tout ω,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a - V_1(\omega)}{ap + (1-p)V_1(\omega)}\right| &\leq (a + V_1(\omega)) \times \frac{1}{\inf(a, V_1(\omega))} \\ &\leq (a + V_1(\omega))\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{V_1(\omega)}\right)\ .\end{aligned}$$

   (d) Nous avons

$$(a + V_1(\omega))\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{V_1(\omega)}\right) \leq 1 + \frac{a}{V_1(\omega)} + \frac{V_1(\omega)}{a} + 1\ .$$

   Donc, par théorème de comparaison et puisque $\mathbb{E}(V_1), \mathbb{E}(1/V_1) < \infty$, nous avons $\mathbb{E}(\left|\frac{a - V_1(\omega)}{ap+(1-p)V_1(\omega)}\right|) < \infty$ $(\forall p)$. Pour tout $p \in]0;1[$, $\forall \omega$, $\frac{\partial}{\partial p}\log(ap + (1-p)V_1(\omega)) = \frac{a - V_1(\omega)}{ap+(1-p)V_1(\omega)}$. Pour tout p, $\mathbb{E}(|\log(ap + (1-p)V_1)|)$ (vu en 4b). Donc par théorème de dérivation sous l'intégrale,

$$c'(p) = \mathbb{E}\left(\frac{a - V_1}{ap + (1-p)V_1}\right)\ .$$

   (e) Nous avons $c''(p) \leq 0$ $(\forall p)$, $c'(0) = \mathbb{E}(a/V_1) - 1$, $c'(1) = 1 - \mathbb{E}(V_1/a)$. Un tableau de variation de c donne le résultat.

   (f)

$$\begin{aligned}c(p) &= \frac{1}{2}\log(ap + 1 - p) + \frac{1}{2}\log(ap + 4(1-p)) \\ &= \frac{1}{2}\log(ap + (1-p)) + \frac{1}{2}\log(ap + 4(1-p)) \\ &= \frac{1}{2}\log((ap + (1-p))(ap + 4(1-p)))\ .\end{aligned}$$

   Il suffit donc de maximiser $(ap + (1-p))(ap + 4(1-p)) = (p+1)(4-2p)$. D'où le p optimal égal à $1/2$.