UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2007-2008
Sylvain Rubenthaler, http://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Examen - mardi 11 décembre 2007.
Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. (a) Soit Z variable aléatoire positive réelle telle que $\forall u, t \geq 0$, $\mathbb{P}(Z \geq t+u | Z \geq t) = \mathbb{P}(Z \geq u)$. Montrer que $\mathbb{P}(Z \geq t+u) = \mathbb{P}(Z \geq t)\mathbb{P}(Z \geq u)$.
   (b) Soit $f(t) = \mathbb{P}(Z \geq t)$ pout $t \geq 0$. On suppose que f est dérivable. Montrer que $f'(t) = f'(0)f(t)$.
2. Soient Z de loi $\mathcal{E}(1)$ (loi exponentielle de paramètre 1), Y de loi $\mathcal{N}(0,1)$ (loi gaussienne de moyenne 0 et de variance 1). Soit $G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$. Calculer la loi de $Z+Y$ (on pourra introduire les variables $U = Z+Y$, $V = Y$ et exprimer la densité de $Z+Y$ à l'aide de G).
3. Soient $X_1, X_2, \dots \geq 0$ indépendantes et identiquement distribuées vérifiant $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Estimer
$$\mathbb{P}\left(X_1 + \dots + X_n \geq n\right)$$
dans le cas : $n = 25$, $\mathbb{E}(X_1) = 4/5$, $\mathrm{Var}(X_1) = 1$.
4. Soient des variables aléatoires $V_0, V_1, V_2, \dots \geq 0$ indépendantes et identiquement distribuées vérifiant $\mathbb{E}(V_n^2) < \infty$, $\mathbb{E}(1/V_n^2) < \infty$ (ce qui implique $\mathbb{E}(V_n) < \infty$, $\mathbb{E}(1/V_n) < \infty$). Soit $a > 1$. Soit p une variable $\in [0,1]$. On définit des variables W_n par récurrence en prenant : $W_0 = 1$, $W_{n+1} = (ap + (1-p)V_n) \times W_n$.
   (a) Montrer que $\log(W_n) = \log(W_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \log(ap + (1-p)V_n)$ pour tout $p \in [0;1]$.
   (b) Montrer que $\frac{\log(W_n)}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}(\log(ap + (1-p)V_1))$ pour tout $p \in [0;1[$ (on admet que le résultat s'étend à $[0;1]$). Posons $c(p) = \mathbb{E}(\log(ap + (1-p)V_1))$.
   (c) Montrer que $\forall \omega$, $\forall p \in [0,1]$,
$$\left| \frac{a - V_1(\omega)}{ap + (1-p)V_1(\omega)} \right| \leq (a + V_1(\omega)) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{V_1(\omega)} \right) .$$
   (d) Montrer que $c'(p) = \mathbb{E}\left(\frac{a-V_1}{ap+(1-p)V_1}\right)$ pour tout $p \in]0;1[$ (on admettra que la formule est vraie sur $[0;1]$).
   (e) On admet que $c''(p) = \mathbb{E}\left(-\frac{(a-V_1)^2}{(ap+(1-p)V_1)^2}\right)$. On suppose que $\mathbb{E}(a/V_1) \geq 1$, $\mathbb{E}(V_1/a) \geq 1$. Étudier la fonction c et montrer qu'elle atteint son maximum dans $]0;1[$.
   (f) On suppose que $\mathbb{P}(V=1) = \mathbb{P}(V=4) = 1/2$. Calculer le p qui maximise c dans le cas où $a = 2$.

Figure 1: Table de la loi normale.