UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 2 MASS, Probabilités numériques, 2007-2008
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de l'examen - 15 janvier 2008.
Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. (a) Prenons une fonction ψ continue bornée et calculons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\psi(X_0,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n)) &= \mathbb{E}(\psi(X_0,\dots,X_n,X_1+V_1,\dots,X_n+V_n))\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x_0,\dots,x_n,x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)\prod_{i=1}^n[g(v_i)]dv_1\dots dv_n\right)\\ &\quad \mu(dx_0)Q(x_0,dx_1)\dots Q(x_{n-1},dx_n)\ .\end{aligned}$$

Changement ce variable : $y_1=x_1+v_1,\dots,y_n=x_n+v_n$ dans l'intégrale entre parenthèses (la matrice jacobienne est I_n). D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\psi(Y_1,\dots,Y_n) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x_0,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)\prod_{i=1}^n[g(y_i-x_i)]dy_1\dots dy_n\right)\\ &\quad \mu(dx_0)Q(x_0,dx_1)\dots Q(x_{n-1},dx_n)\\ \text{(Fubini-Tonelli)} &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}}\psi(x_0,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)\prod_{i=1}^n[g(y_i-x_i)]\\ &\quad \mu(x_0)Q(x_0,x_1)\dots Q(x_{n-1},x_n)dx_0\dots dx_ndy_1\dots dy_n\ .\end{aligned}$$

D'où la réponse.

(b) Prenons une fonction ψ continue positive bornée. En utilisant Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^{n+1}}f(x_n)\mu(x_0)\prod_{i=1}^n[g(Y_i-x_i)Q_(x_{i-1},x_i)]dx_0\dots dx_n}{\int_{\mathbb{R}^{n+1}}1\mu(x_0)\prod_{i=1}^n[g(Y_i-x_i)Q_(x_{i-1},x_i)]dx_0\dots dx_n}\psi(Y_1,\dots,Y_n)\right)\\ &=\int_{\mathbb{R}^{2n+1}}\frac{\int_{\mathbb{R}^{n+1}}f(x_n)\mu(x_0)\prod_{i=1}^n[g(y_i-x_i)Q_(x_{i-1},x_i)]dx_0\dots dx_n}{\int_{\mathbb{R}^{n+1}}1\mu(x_0)\prod_{i=1}^n[g(y_i-x_i)Q_(x_{i-1},x_i)]dx_0\dots dx_n}\psi(y_1,\dots,y_n)\\ &\quad\mu(x'_0)\prod_{i=1}^nQ(x'_{i-1},x'_i)g(y_i-x'_i)dx'_0\dots dx'_ndy_1\dots dy_n\\ &=\int_{\mathbb{R}^n}\psi(y_1,\dots,y_n)\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^{n+1}}f(x_n)\mu(x_0)\prod_{i=1}^n[g(y_i-x_i)Q_(x_{i-1},x_i)]dx_0\dots dx_n}{\int_{\mathbb{R}^{n+1}}1\mu(x_0)\prod_{i=1}^n[g(y_i-x_i)Q_(x_{i-1},x_i)]dx_0\dots dx_n}\right)\\ &\quad\times\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\mu(x'_0)\prod_{i=1}^nQ(x'_{i-1},x'_i)g(y_i-x'_i)dx'_0\dots dx'_n\right)dy_1\dots dy_n\\ &=\int_{\mathbb{R}^{2n+1}}\psi(y_1,\dots,y_n)f(x_n)\mu_0(x_0)\prod_{i=1}^n[g(y_i-x_i)Q_(x_{i-1},x_i)]dx_0\dots dx_ndy_1\dots dy_n\\ &=\mathbb{E}(f(X_n)\psi(Y_1,\dots,Y_n))\ .\end{aligned}$$

2. (b) i. Si les deux chaînes acceptent la proposition en même temps alors elles se retrouvent au même endroit). Si $X_n\neq Z_n$, la probabilité que le prochain point proposé soit accepté par

les deux chaînes est :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} q_j \min\left(\frac{\pi_j q_{X_n}}{\pi_{X_n} q_j}, \frac{\pi_j q_{Z_n}}{\pi_{Z_n} q_j}, 1\right) &= \sum_{j=1}^{m} \pi_j \min\left(\frac{q_{X_n}}{\pi_{X_n}}, \frac{q_{Z_n}}{\pi_{Z_n}}, \frac{q_j}{\pi_j}\right) \\ &\geq \frac{1}{w_1} \ .\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(T > n) \leq \left(1 - \frac{1}{w_1}\right)^n$.

ii.

$$\begin{aligned}|\mathbb{P}(X_n \in A) - \mathbb{P}(Z_n \in A)| &= |\mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_n \in A} - \mathbf{1}_{Z_n \in A})| \\ &= |\mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_n \in A, Z_n \notin A} - \mathbf{1}_{X_n \notin A, Z_n \in A})| \\ &\leq \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_n \in A, Z_n \notin A} + \mathbf{1}_{X_n \notin A, Z_n \in A}) \\ &\leq 2\mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_n \neq Z_n}) \ .\end{aligned}$$

iii. Par les calculs précédents :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}(X_n) - \pi\|_{VT} &\leq 2\mathbb{P}(X_n \neq Z_n) \\ &\leq 2\mathbb{P}(T > n) \\ &= \leq 2\left(1 - \frac{1}{w_1}\right)^n \ .\end{aligned}$$