UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 2 MASS, Probabilités numériques, 2007-2008
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Examen - 15 janvier 2008.

Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ chaîne de Markov dans $\mathbb{R}$ de loi initiale μ (de densité que l'on note μ par abus de notation) et de transition $Q(.,.)$ qui a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue (et on écrit donc $Q(x,dy)=Q(x,y)dy$). Soient $V_1, V_2, \dots$ indépendants et identiquement distribués de densité g, indépendants des X_n. Pour $n\geq 1$, on pose $Y_n = X_n + V_n$. Fixons un $n \geq 1$.

   (a) Montrer que la densité de $(X_0,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n)$ est :
   $$(x_0,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \mapsto \mu(x_0)\prod_{i=1}^n Q(x_{i-1},x_i)g(y_i-x_i)\ .$$

   (b) Montrer que pour toute fonction f continue, bornée, positive :
   $$\mathbb{E}(f(X_n)|Y_1,\dots,Y_n) = \frac{\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x_n)\mu(x_0)\prod_{i=1}^n g(Y_i-x_i)Q(x_{i-1},x_i)dx_0\dots dx_n}{\int_{\mathbb{R}^{n+1}} 1\mu(x_0)\prod_{i=1}^n g(Y_i-x_i)Q(x_{i-1},x_i)dx_0\dots dx_n}\ .$$
   On pourra utiliser la propriété fondamentale de l'espérance conditionelle, c'est à dire $\mathbb{E}(f(X_n)|Y_1,\dots,Y_n) = \phi(Y_1,\dots,Y_n)$ avec ϕ l'unique fonction vérifiant $\mathbb{E}(\phi(Y_1,\dots,Y_n)\psi(Y_1,\dots,Y_n)) = \mathbb{E}(f(X_n)\psi(Y_1,\dots,Y_n))$, $\forall\psi$.

2. Soit $m\in\mathbb{N}^*$. Soit $Q=((q_{i,j}))_{1\leq i,j\leq m}$ matrice de Markov sur $\{1,\dots,m\}$. Soit $\pi=(\pi_i)_{1\leq i\leq m}$ probabilité sur $\{1,\dots,m\}$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ chaîne de Markov sur $\{1,\dots,m\}$ définie par
   - $X_0 = x_0$
   - si $X_n = i$, $Y_{n+1}=j$ avec probabilité $q_{i,j}$, U_{n+1} de loi uniforme sur $[0,1]$ (indépendamment de tout les reste),
   $$X_{n+1} = \begin{cases} Y_{n+1} & \text{si } U_{n+1} \leq \min\left(\frac{\pi_{Y_{n+1}} q_{Y_{n+1},i}}{\pi_i q_{i,Y_{n+1}}}, 1\right) \\ X_n & \text{sinon.}\end{cases}$$

   (Il s'agit donc de l'algorithme de Hastings-Metropolis.) On note P la transition de (X_n).

   (a) Question de cours : montrer que π est une probabilité invariante par rapport à P.

   (b) Nous allons supposer à partir de maintenant que $q_{i,j}=q_j$ ne dépend pas de j. Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ chaîne de Markov définie par :
   - Z_0 est de loi π
   - Si $Z_n = k$,
   $$Z_{n+1} = \begin{cases} Y_{n+1} & \text{si } U_{n+1} \leq \min\left(\frac{\pi_{Y_{n+1}} q_k}{\pi_k q_{Y_{n+1}}}, 1\right) \\ Z_n & \text{sinon.}\end{cases}$$

   (avec les même Y_n, U_n que ceux entrant dans la définition de (X_n)). Soit $T=\inf\{k : X_k = Z_k\}$. Soit $w_1 = \sup\left\{\frac{\pi_j}{q_j} : 1\leq j\leq m\right\}$

i. Montrer que, $\forall n \geq 0$, $\mathbb{P}(T > n) \leq \left(1 - \frac{1}{w_1}\right)^n$.

ii. Montrer que $\forall A$, $|\mathbb{P}(X_n \in A) - \mathbb{P}(Z_n \in A)| \leq 2\mathbb{P}(X_n \neq Z_n)$

iii. Montrer que $\|\mathcal{L}(X_n) - \pi\|_{VT} \leq 2\left(1 - \frac{1}{w_1}\right)^n$. (On rappelle que $\|\mathcal{L}(X_n) - \pi\|_{VT} = \sup_A |\mathbb{P}(X_n \in A) - \pi(A)|$.)