**UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS**
**Master 2 MASS - Probabilités numériques - 2007-2008 - 1er semestre**
**Sylvain Rubenthaler**
`http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html`

**Feuille d'exercices numéro 2**

1. Couplage.
On suppose que l'on a un noyau de Markov irréductible $Q$ sur un espace $E$ dénombrable. On suppose qu'il existe une probabilité $\pi$ invariante sous $Q$ et que si $(Y_n)$ chaîne de Markov de transition $Q$ et de loi initiale $\pi_0$ alors :

$$\frac{f(Y_1)+\cdots+f(Y_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \int_E f(x)\pi_0(dx) \tag{1}$$

On fait l'hypothèse : il existe une probabilité $\lambda$ sur $E$ et $\epsilon > 0$ tels que $\forall x, y \in E$,

$$\epsilon\lambda(y) \leq Q(x,y) \ .$$

On veut montrer que si $(X_n)$ chaîne de Markov de transition $Q$ et de loi initiale $\pi$ quelconque alors on a encore (1).

On construit deux chaînes de Markov $(X_n)$ et $(Y_n)$ par :

- On tire $X_0$ suivant $\pi$ et $Y_0$ (indépendamment de $X_0$) suivant $\pi_0$.
- Si on a tiré $X_0, \dots, X_n$ et $Y_0, \dots, Y_n$, on tire $U_n \sim \mathcal{U}([0,1])$ indépendamment de toutes les autres variables.
  - Si $U_n \leq \epsilon$, on tire $X_{n+1} = Y_{n+1}$ suivant $\lambda$.
  - Sinon
    - Si $X_n = Y_n$, on tire $X_{n=1} = Y_{n+1}$ suivant la loi $\frac{1}{1-\epsilon}(Q(X_n,.)-\epsilon\lambda(.))$ (c'est bien une loi de probabilité).
    - Sinon on tire $X_{n+1}$ et $Y_{n+1}$ indépendamment suivant $X_n \sim \frac{1}{1-\epsilon}(Q(X_n,.) - \epsilon\lambda(.))$, $Y_n \sim \frac{1}{1-\epsilon}(Q(Y_n,.) - \epsilon\lambda(.))$.

(a) Montrer que $(X_n)$ et $(Y_n)$ sont des chaînes de Markov de transition $Q$.

(b) Montrer que pour presque tout $\omega$, $\exists n$ tel que $X_n(\omega) = Y_n(\omega)$.

(c) Montrer que

$$\frac{f(Y_1)+\cdots+f(Y_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \int_E f(x)\pi_0(dx)$$

2. Soient $p$ et $q$ des probabilités sur $E$ (toujours dénombrable) avec $\forall x, 0 < p(x) \leq cq(x)$ (par abus de notation $p(x) = p(\{x\})$) où $c$ constante $> 0$. On prend des variables $Y_n$ i.i.d. de loi $q$, indépendantes de $X_0$. On définit par récurrence une chaîne $(X_n)$ :

- On tire $X_0$ suivant $q$.
- Quand on a $X_n$, on tire $U_n \sim \mathcal{U}([0,1])$ indépendamment de toutes les autres variables et :

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_{n+1} & \text{si } U_n \leq \frac{p(Y_{n+1})}{cq(Y_{n+1})} \\ X_n & \text{sinon} \end{cases} .$$

(a) Montrer que $(X_n)$ est une chaîne de Markov.

(b) Calculer la probabilité de transition $P(x, y)$ de $(X_n)$.

(c) Calculer $\mu P$ pour une probabilité $\mu$. En déduire que la loi de $X_n$ converge vers une unique probabilité invariante égale à $p$.

(d) Quel rapport y-a-t-il entre cette chaîne et une méthode de rejet classique ?

3. On se place sur $E = \mathbb{Z}$. Soit $q$ loi sur $E$ telle que $q(x) = q(-x)$. Soit $p$ une loi telle que $p(x) > 0$, $\forall x$. On définit une chaîne de Markov $(X_n)$ par :

- $X_0 = x_0$ où $x_0$ tel que $p(x_0) \neq 0$
- On tire $U_n \sim \mathcal{U}([0,1])$ indépendante de toutes les autres variables et $Z_n$ de loi $q$ indépendante de toutes les autres variables. On pose $Y_n = X_n + Z_n$ et :

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_n & \text{si } U_n \leq \inf\left(1, \frac{p(Y_n)}{p(X_n)}\right) \\ X_n & \text{sinon } . \end{cases}$$

(a) Montrer que $(X_n)$ est une chaîne réversible.

(b) Soit $\pi(x) = \frac{1}{Z}\exp(-\beta H(x))$ une loi sur $E$ (où $H$ est une fonction, $\beta$ une constante quelconque et $Z$ est la constante de normalisation). Comment approcher $\int_E f(x)\pi(dx)$ à l'aide d'un algorithme de Métropolis (sans même savoir calculer $Z$) ?