UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2007-2008
Sylvain Rubenthaler, http://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé du partiel 2 - mardi 20 novembre 2007.

Durée : 2h.

Documents et calculatrices interdits.

La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.

Les exercices sont indépendants.

2. (a) La densité de $U+V$ est la convolée des densités de U et V, c'est donc la fonction de t suivante

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(u)\mathbf{1}_{[0,1]}(t-u)du &= \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,1]}(t-u)du \\ &= \mathbf{1}_{[0,2]}(t)\int_{\sup(t-1,0)}^{\inf(t,1)} 1du \\ &= \mathbf{1}_{[0,2]}(t)(\inf(t,1)-\sup(t-1,0))\ .\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|U-V|\leq 1/10) &= \int_{[0,1]^2} \mathbf{1}_{|u-v|\leq 1} dudv \\ \text{(Fubini-Tonelli)} &= \int_0^1 \int_{\sup(v-1/10,0)}^{\inf(v+1/10,1)} 1dudv \\ &= \int_0^1 \inf(v+1/10,1)-\sup(v-1/10,0)dv \\ &= \int_0^{1/10} v+1/10dv + \int_{1/10}^{9/10} 2/10dv + \int_{9/10}^1 1-v+1/10dv \\ &= \frac{1}{2}\left[(v+1/10)^2\right]_0^{1/10} + \frac{8}{100} + \frac{1}{2}\left[-(11/10-v)^2\right]_{9/10}^1 \\ &= \frac{11}{100}\ .\end{aligned}$$

3. (a) Inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

   (b) $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(|X_n|\geq 1)\leq \sum_{n\geq 0} ne^{-n}<\infty$ et on conclut par le lemme de Borel-Cantelli.

4. (a) Soit $f\in C_b^+(\mathbb{R}^+)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X)) &= \int_{(\mathbb{R}^+)^2} f(x)\frac{2}{\pi}\exp(-x(1+y^2))dxdy \\ \text{(Fubini-Tonelli)} &= \int_0^{+\infty} f(x)\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\exp(-x(1+y^2))dydx \\ \text{(changement de variable } \sqrt{x}y=u) &= \int_0^{+\infty} f(x)\frac{2}{\pi}e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{x}}dx\ .\end{aligned}$$

Donc la densité de X est $x\mapsto \frac{1}{\sqrt{x\pi}}e^{-x}\mathbf{1}_{x\geq 0}$.

   (b) De même, la densité de Y est la fonction de y suivante

$$\mathbf{1}_{y\geq 0}\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\exp(-x(1+y^2))dx = \mathbf{1}_{y\geq 0}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\ .$$

5. (a) Soit $f \in C_b^+((\mathbb{R}^+)^2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(U,V)) &= \mathbb{E}(f((XY)^{1/4},(X/Y)^{1/4})) \\
&= \int_{(\mathbb{R}^+)^2} f((xy)^{1/4},(x/y)^{1/4}) \frac{\exp(-(xy)^{1/4})}{4\pi(y\sqrt{x}+x\sqrt{y})} dxdy \ .
\end{aligned}$$

Changement de variable $u=(xy)^{1/4}, v=(x/y)^{1/4}$ ((u,v) parcourt $(\mathbb{R}^+)^2$ quand (x,y) parcourt $(\mathbb{R}^+)^2$). D'où $x=u^2v^2$, $y=u^2/v^2$. Matrice jacobienne :

$$\begin{bmatrix} 2uv^2 & 2u/v^2 \\ 2u^2v & -2u^2/v^3 \end{bmatrix}$$

Valeur absolue du déterminant : $8u^3/v$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(U,V)) &= \int_{(\mathbb{R}^+)^2} f(u,v) \frac{\exp(-u)}{4\pi(u^3/v+u^3v)} \frac{8u^3}{v} dudv \\
&= \int_{(\mathbb{R}^+)^2} f(u,v) \frac{\exp(-u)}{1+v^2} \frac{2}{\pi} dudv \ .
\end{aligned}$$

Donc la densité de (U,V) est $(u,v) \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u)\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(v)\frac{\exp(-u)}{1+v^2}\frac{2}{\pi}$.

(b) La densité trouvée est une fonction produit d'une fonction de u et d'une fonction de v donc U et V sont indépendantes.

(c) On sait que la densité de U est proportionelle à la fonction $u \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u)e^{-u}\frac{2}{\pi}$ et que son intégrale vaut 1. On en déduit que la densité de U est $u \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u)e^{-u}$. De même, la densité de V est $v \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(v)\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+v^2}$.