UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2007-2008
Sylvain Rubenthaler, http://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Partiel 2 - mardi 20 novembre 2007.
Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. Question de cours : énoncer et prouver le théorème 4.3.1 (continuité sous l'intégrale).
2. Soient U, V des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.
   (a) Calculer la densité de $U+V$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(|U-V|\leq 1/10)$. (Le résultat est une fraction.) On pourra utiliser que pour tout événement A, $\mathbb{P}(A)=\mathbb{E}(\mathbf{1}_A)$.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles telles que $\forall n$, $\mathbb{E}(|X_n|)\leq e^{-n}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(|X_n|\geq 1/n)\leq ne^{-n}$.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}(\{\omega : \text{il existe une infinité de } n \text{ tels que } |X_n|\geq 1/n\}=1$.
4. Soit (X,Y) à valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^2$ de densité $(x,y)\mapsto \frac{2}{\pi}\exp(-x(1+y^2))\mathbf{1}_{x\geq 0,y\geq 0}$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   (a) Calculer la densité de X.
   (b) Calculer la densité de Y.
5. Soit (X,Y) à valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^2$ de densité
$$(x,y)\mapsto \frac{\exp(-(xy)^{1/4})}{4\pi(y\sqrt{x}+x\sqrt{y})}\mathbf{1}_{x\geq 0,y\geq 0}\ .$$
   (a) Soient $U=(XY)^{1/4}$, $V=\left(\frac{X}{Y}\right)^{1/4}$. Quelle est la densité de (U,V) ?
   (b) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?
   (c) Donner les densités de U et V.