UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2008-2009
Sylvain Rubenthaler, http://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de l'examen du lundi 4 mai 2009.
Durée : 3h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. (a) $A' \subset A$ donc $\mathbb{P}(A') \leq \mathbb{P}(A)$.

   (b) Notons $B_i = \{X_{ni} = X_{ni+1} = \cdots = X_{ni+n-1} = 0\}$. Nous avons $A' = \bigcup_{j\geq 0}(B_0 \cup \cdots \cup B_j)$. Pour tout i, $\mathbb{P}(B_i) = p^n$ (par indépendance des X_k) et, $\forall j$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_0 \cup \cdots \cup B_j) &= 1 - \mathbb{P}(B_0^c \cap \cdots \cap B_j^c) \\ \text{(indépendance)} &= 1 - (1-p)^{(j+1)n} \ . \end{aligned}$$

   Par réunion croissante, $\mathbb{P}(A') = \lim_{j\to+\infty} \mathbb{P}(B_0 \cup \cdots \cup B_j) = 1$.

   (c) $1 \geq \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(A')$ donc $\mathbb{P}(A) = 1$.

2. (a) Inégalité de Bienaymé-Tchebichev : $\mathbb{P}(U_1 + \cdots + U_n \geq n^2) \leq \frac{1}{n^2}\mathbb{E}(U_1 + \cdots + U_n) = \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (b) On calcule : $\mathbb{E}(U_1) = 1/2$, $\mathrm{Var}(U_1) = 1/12$.

$$\mathbb{P}\left(U_1 + \cdots + U_n \geq \frac{11n}{20}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{U_1 + \cdots + U_n - n(1/2)}{(1/\sqrt{12})\sqrt{n}} \leq (\frac{11}{20}n - \frac{n}{2})\frac{1}{(1/\sqrt{12})\sqrt{n}}\right) .$$

   Et $(\frac{11}{20}n - \frac{n}{2})\frac{1}{(1/\sqrt{12})\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{20} \times \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. On sait que $1,5 \leq \sqrt{3} \leq 2$, on approche $\sqrt{3}$ par 1.7. Nous avons $1.7 * 2 > 3$. Par le théorème central-limite (et en regardant la table), la probabilité à estimer est donc plus petite que $1 - 0.9986 = 0.0004$.

3. Pour tout $x \notin \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. $(\cos(x))^n e^{-x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc cette convergence a lieu p.s. en x. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\cos(x))^n e^{-x} \leq e^{-x}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc par convergence dominée, la limite cherchée est 0.

4. (a) Si $t \leq 0$, $\mathbb{P}(\sup(U,V) \leq t) = 0$. Si $t \geq$), on calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sup(U,V) \leq t) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{]-\infty;t]}(\sup(U,V))) \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{]-\infty;t]}(\sup(u,v))e^{-u}e^{-v}dudv \\ &= \int_0^t \left(\int_0^{t-u} e^{-u}e^{-v}dv\right)du \\ &= \int_0^t e^{-u}(1 - e^{-(t-u)})du \\ &= 1 - e^{-t} - te^{-t} \ . \end{aligned}$$

   (b) Soit $\phi \in C_b^+(\mathbb{R})$.

$$\mathbb{E}(\phi(U+V)) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \phi(u+v)e^{-u-v}dudv \ .$$

Changement de variables :

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = v \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} u = x - y \\ v = y \end{cases} \quad .$$

Matrice jacobienne :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour $u, v \geq 0$, on a $x, y \geq 0$ avec $y \leq x$ (et inversement). Nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\phi(U+V)) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \phi(x) \exp(-x) \, dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) x e^{-x} dx \ . \end{aligned}$$

Donc la densité cherchée est $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) x e^{-x}$.

5. (a) Pour tout ω, $\left| \frac{e^{uX(\omega)}-1}{X(\omega)} \right| \leq u$. Donc $\mathbb{E}\left(\left| \frac{e^{uX}-1}{X} \right| \right) \leq \mathbb{E}(u) = u$.

   (b)
   - Pour tout u, $\mathbb{E}\left(\frac{e^{ux}-1}{X} \right)$ existe par la question précédente.
   - Pour tout ω, $u \mapsto \frac{e^{uX(\omega)}-1}{X(\omega)}$ est dérivable et de dérivée $e^{uX(\omega)}$.
   - Pour tout $|u| < M$, $|e^{uX}| \leq e^{M|X|}$. Et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{M|X|}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{M|x|} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(C_M - x^2/4)}{\sqrt{2\pi}} dx < \infty \ . \end{aligned}$$

   Donc, par théorème de dérivation globale, la fonction considérée est dérivable sur $]-M, M[$ et de dérivée $u \mapsto \mathbb{E}(e^{uX})$.

   (c)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{uX}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ux} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-\frac{1}{2}(x-u)^2 + \frac{u^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= e^{-u^2/2} \ . \end{aligned}$$

   (d) L'expression de la dérivée est valable sur $]-M; M[$ pour tout M donc elle est valable sur tout $\mathbb{R}$.