

**Examen de rattrapage - Lundi 8 juin 2009.**

*Durée : 2h.*

*Documents et calculatrices interdits.*

*La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.*

*Les exercices sont indépendants.*

1. Soient  $U_1, U_2, \dots$  indépendantes et identiquement distribuées de loi  $\mathcal{E}(1)$  (loi exponentielle de paramètre 1).
  - (a) Calculer  $\mathbb{E}(U_1)$ ,  $\text{Var}(U_1)$ .
  - (b) Estimer  $\mathbb{P}(U_1 + \dots + U_n \geq n(1 + \alpha))$  pour  $n = 100$ ,  $\alpha = 1/10$ .
2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-x + (\cos(x))^n) dx$ .
3. Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires indépendantes, de même loi  $\mathcal{U}([0; 1])$  (uniforme sur  $[0; 1]$ ).
  - (a) Calculer  $\mathbb{P}(\inf(U, V) \geq t)$ . (On rappelle que  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\inf(x, y)$  est le plus petit des deux réels  $x, y$ .)
  - (b) Calculer la fonction de répartition de  $\inf(U, V)$ .
4. Soient  $U$  de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  (loi normale de moyenne 0 et de variance 1) et  $V$  de loi  $\mathcal{E}(1)$  (loi exponentielle de paramètre 1) deux variables aléatoires indépendantes. Soient  $X = UV$  et  $Y = V$ .
  - (a) Calculer la densité du couple  $(X, Y)$ .
  - (b) Quelle est la densité de  $X$  (on pourra laisser le résultat sous forme d'une intégrale à paramètre) ?