# TD1 : méthode des moments et maximum de vraisemblance

**Exercice 1:** Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un $n$-échantillon de loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$ inconnu.

1. Rappeler les définitions d'un "$n$-échantillon" et d'un "estimateur".
2. Décrire la loi de $X_1$. Quelle est son espérance ? Sa variance ?
3. Donner un estimateur de $p$ par la méthode des moments.
4. Vérifier que pour tout $k \in \{0,1\}$,
$$\mathbb{P}(X_1 = k) = p^k(1-p)^{1-k} \ .$$
En déduire l'estimateur $\hat{p}$ de $p$ par la méthode du maximum de vraisemblance.
5. Calculer le biais et l'erreur quadratique de $\hat{p}$.

**Exercice 2:** Nous disposons d'un $n$-échantillon $(T_1,\dots,T_n)$ de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ inconnu. Rappelons que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \ .$$

1. Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}_\lambda[X_1]$ et de $\mathrm{Var}_\lambda(X_1)$.
2. Proposer deux estimateurs $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ de $\lambda$ obtenus par la méthode des moments.
3. Calculer la fonction de vraisemblance $L(T_1,\dots,T_n;\lambda)$ associée aux observations.
3. En déduire l'estimateur $\hat{\lambda}_3$ de $\lambda$ par la méthode du maximum de vraisemblance.

**Exercice 3:** Considérons $(Y_1,\dots,Y_n)$ un $n$-échantillon de loi normale centrée en $m \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 > 0$. Les quantités $m$ et $\sigma^2$ sont supposées inconnues. On rappelle que la loi de $Y_1$ admet la densité suivante sur $\mathbb{R}$ :
$$f_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \ .$$

1. Donner un estimateur de $m$ par la méthode des moments. Est-il sans biais ? Si non, modifier-le pour qu'il le devienne.
2. Donner un estimateur de $\sigma^2$ par la méthode des moments centrés. Est-il sans biais ? Si non, modifier-le pour qu'il le devienne.
3. Calculer la fonction de vraisemblance associée aux observations. En déduire deux estimateurs $\hat{m}$ et $\hat{\sigma}^2$ de $m$ et $\sigma^2$, respectivement, par la méthode du maximum de vraisemblance.
4. Si $\sigma^2$ était connue, l'estimateur de $m$ trouvé à la question précédente aurait-il été le même ?
5. Si $m$ était connue, l'estimateur de $\sigma^2$ trouvé à la question précédente aurait-il été le même ?

**Exercice 4:** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ inconnu. Considérons une variable aléatoire $X$ dont la fonction de densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & , \text{si } x > \theta \ , \\ 0 & , \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f$ est bien une densité de probabilité.
2. Calculer l'espérance et la variance de $X$.

Donnons-nous maintenant un $n$-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de même loi que $X$.

3. Donner deux estimateurs $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ de $\theta$ obtenus par la méthode des moments.
4. Quelle est la fonction de vraisemblance associée aux observations ? En déduire l'estimateur $\hat{\theta}_3$ du maximum de vraisemblance de $\theta$.

Question subsidiaire :

5. Donner la fonction de répartition de $\hat{\theta}_3$ (*indice :* exprimer cette fonction de répartition en fonction de celle de $X_1$). En déduire la densité de $\hat{\theta}_3$ et calculer son biais.