L3 MASS 08
Statistique

TD2

Ex 1

a) $\forall$ l'ensemble A :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1, Y \in A) + \mathbb{P}(\varepsilon = -1, -Y \in A)$$

$$\text{(ind.)} \quad = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) \times \mathbb{P}(Y \in A) + \mathbb{P}(\varepsilon = -1) \times \mathbb{P}(-Y \in A)$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(Y \in A) + \frac{1}{2}\,\underbrace{\mathbb{P}(Y \in A)}_{\text{par sym. de } Y}$$

$$= \mathbb{P}(Y \in A)$$

donc X et Y ont même loi

b) $\mathbb{E}(Y \varepsilon Y) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(\varepsilon Y) = \mathbb{E}(\varepsilon Y^2) - 0$

$$(\varepsilon \perp\!\!\!\perp Y) \quad = \mathbb{E}(\varepsilon)\,\mathbb{E}(Y^2)$$

$$= 0$$

c) Y et εY ne sont pas indépendants car sinon on aurait Y^2 ind. de $(\varepsilon Y)^2 = Y^2$

d) Si $(Y, \varepsilon Y)$ était gaussien alors, par (b), Y et εY seraient indépendants. On a vu en (c) que Y et εY ne sont pas indépendants. Donc $(Y, \varepsilon Y)$ n'est pas gaussien.

Ex 2

Soit un ensemble A.

$$\mathbb{P}(Z \in A) = \mathbb{P}(Y \in A, |Y| \leq a) + \mathbb{P}(-Y \in A, |Y| > a)$$

$$= \mathbb{P}(Y \in A \cap [-a, a]) + \underbrace{\mathbb{P}(-Y \in A \cap (]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[))}_{\text{par sym. de } Y}$$

$$= \mathbb{P}(Y \in A \cap (]-\infty, a[\cup]a, +\infty[))$$

Donc $\mathbb{P}(Z \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$.

Ex 3

Prenons $\begin{cases} X_1 = aY_1 + bY_2 \\ X_2 = cY_1 + dY_2 \end{cases}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ est gaussien

$\mathbb{E}(X_1) = a\,\mathbb{E}(Y_1) + b\,\mathbb{E}(Y_2) = 0$; de même $\mathbb{E}(X_2) = 0$

$\mathbb{E}(X_1^2) = a^2\,\mathbb{E}(Y_1^2) + b^2\,\mathbb{E}(Y_2^2) + 2ab\,\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = a^2 + b^2$

de même : $\mathbb{E}(X_2^2) = c^2 + d^2$

$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - 0 = ab + cd$

On veut donc avoir $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = \rho \end{cases}$

Il suffit de prendre $a = 1$, $b = 0$, $c = \rho$, $d = \sqrt{1 - \rho^2}$

Ex 4

Y est de loi gaussienne car $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien.

$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbb{E}(X_i)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}(X_i)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i X_i)^2 - (a_i \mathbb{E}(X_i))^2 + 2\sum_{j<k} a_j a_k \left[X_j X_k - \mathbb{E}(X_j X_k)\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i^2\,\mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{j<k} a_j a_k\,\mathrm{Cov}(X_j, X_k)
\end{aligned}
$$

Ex 5

a) i) On sait que $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sigma}$ est (approximativement) de loi $\mathcal{N}(0,1)$

On veut : $\mathbb{P}(-\alpha \leq \overline{X}_n - m \leq \alpha) = 0,9$

$$\mathbb{P}\left(-\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sigma} \leq \frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0,9$$

Notons pour tout u : q_u le quantile d'ordre u de $\mathcal{N}(0,1)$
(c'est à dire, pour Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(Z \leq q_u) = u$)
Alors, on veut α tel que : $\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sigma} \leq \frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma}\right)$

$$- \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sigma} \leq -\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0,9$$

Par symétrie de la gaussienne : $2\,\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sigma} \leq \frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = 0,9$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sigma} \leq \frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0,95$$

$$\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma} = q_{0,95} \overset{\text{(table)}}{=} 1,65$$

d'où $\alpha = 0,52$

ii) On veut $\mathbb{P}(m \geq \beta) = 0,9$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sigma} \leq \frac{(\overline{X}_n - \beta)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0,9$$

donc $\frac{(\overline{X}_n - \beta)\sqrt{n}}{\sigma} = q_{0,9} = 1,29$ (on calcule $\overline{X}_n = 499,5$)

d'où $\beta = -\frac{1,29}{\sqrt{n}} + \overline{X}_n = 499,09$

iii) On veut $\mathbb{P}(m \leq \gamma) = 0,9$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sigma} \geq \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \gamma)}{\sigma}\right) = 0,9$$

$\boxed{4}$ $1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \gamma)}{\sigma} < \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \gamma)}{\sigma}\right) = 0,9$

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \gamma)}{\sigma} = \varphi_{0,1} = -1,29$$

$$\gamma = 499,91$$

b) On sait que $\frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\frac{V_n}{n-1}}}$ suit (approximativement) une loi T_{n-1} (Student à $n-1$ degrés de liberté).

i) On veut $\mathbb{P}(-a \leq \overline{X}_n - m \leq a) = 0,9$

$$\mathbb{P}\left(-a \leq \frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\frac{V_n}{n-1}}} \leq a\right) = 0,9$$

On note φ'_α le fractile d'ordre α de la loi de Student T_9.
On veut : (en utilisant la symétrie)

$$\mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\frac{V_n}{n-1}}} \leq a\right) - \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\frac{V_n}{n-1}}} \leq -a\right) = 0,9$$

$$2\,\mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - m}{\left(\frac{V_n}{n-1}\right)^{1/2}} \leq a\right) - 1 = 0,9$$

$$a = \varphi'_{0,95} = 1,833$$

ii) On sait que $\frac{n}{\sigma^2}\overline{V}_n$ suit (approximativement) une loi χ^2_{n-1}.

On veut $\mathbb{P}\left(\frac{n\overline{V}_n}{\sigma^2} \leq \frac{n\overline{V}_n}{\lambda_1}\right) = 0,9$.

On calcule $\overline{V}_n = 6,65$.

Notons φ''_α le fractile d'ordre α de la loi χ^2_{n-1}

$\boxed{5}$

On veut $\frac{n\overline{V_n}}{\lambda_1} = 14,684$

d'où $\lambda_1 = 4,53$

iii) On veut $\mathbb{P}\left(\frac{n\overline{V_n}}{\sigma^2} \geq \frac{n\overline{V_n}}{\lambda_2}\right) = 0,9$

$1 - \mathbb{P}\left(\frac{n\overline{V_n}}{\sigma^2} \leq \frac{n\overline{V_n}}{\lambda_2}\right) = 0,9$

$\frac{n\overline{V_n}}{\lambda_2} = \varphi''_{0,1} = 4,168$

$\lambda_2 = 15,95$