UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Statistiques - 2008-2009

TD2 : vecteurs gaussiens

1. Soit Y de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et ϵ une v.a. telle que $\mathbb{P}(\epsilon=1)=\mathbb{P}(\epsilon=-1)=1/2$ et $\epsilon \perp\!\!\!\perp Y$.
   (a) Montrer que $X=\epsilon Y$ est gaussien.
   (b) Calculer $\mathrm{Cov}(Y,\epsilon Y)$.
   (c) Les variables Y et ϵY sont-elles indépendantes ?
   (d) Le vecteur $(Y,\epsilon Y)$ est-il gaussien ?

2. Soit Y de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $a>0$. Posons

$$Z \begin{cases} = Y & \text{si } |Y| \leq a \\ = -Y & \text{si } |Y| > a\ . \end{cases}$$

   Montrer que Z est de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

3. Soit $\rho \in [0;1]$. Soient Y_1, Y_2 deux variables indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Trouver $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que le vecteur (aY_1+bY_2, cY_1+dY_2) soit de loi $\mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$.

4. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un vecteur gaussien. Soit $Y=\sum_{j=1}^n a_j X_j$ (les a_j sont des réels). Montrer que Y est de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ avec

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{j=1}^n a_j \mathbb{E}(X_j)\ , \\ \sigma^2 &= \sum_{j=1}^n a_j^2 \mathrm{Var}(X_j) + 2\sum_{j<k} a_j a_k \mathrm{Cov}(X_j,X_k)\ . \end{aligned}$$

5. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ ($m\in\mathbb{R}$, $\sigma\in\mathbb{R}$). On suppose que $n=10$ et que l'on a observé les valeurs suivantes

   495 ; 497 ; 498 ; 498 ; 498 ; 501 ; 501 ; 501 ; 502 ; 504 .

   (a) On suppose dans un premier temps que l'on connaît σ^2 et que $\sigma^2=1$.
      i. Trouver $\alpha>0$ tel que $\mathbb{P}(m\in[\bar{X}_n-\alpha;\bar{X}_n+\alpha])=0,9$.
      ii. Trouver $\beta>0$ tel que $\mathbb{P}(m\geq\beta)=0,9$.
      iii. Trouver $\gamma>0$ tel que $\mathbb{P}(m\leq\gamma)=0,9$.
   (b) On suppose maintenant que l'on ne connaît pas σ^2.
      i. Trouver $a>0$ tel que $\mathbb{P}(|\bar{X}_n-m|\leq a)=0,9$.
      ii. Trouver λ_1 tel que $\mathbb{P}(\sigma^2\geq\lambda_1)=0,9$.
      iii. Trouver λ_2 tel que $\mathbb{P}(\sigma^2\leq\lambda_2)=0,9$.