Feuille de TD n°3

Exercice n°1 :

Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien centré de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{R}^3$.

1. Le vecteur X admet-il une densité?
2. Déterminer a tel que les variables aléatoires X_1 et $Y = X_2 - X_1$ soient indépendantes. Quelle est alors la loi de (X_1, Y)?

Exercice n°2 :

Soit X un vecteur gaussien de matrice de covariance C et d'espérance m. On suppose que $C = A.D.A^t$, où A^t indique la transposée de la matrice A, D est une matrice diagonale et A une matrice orthogonale.
On considère le vecteur aléatoire $Y = A^t.(X - m)$.

1. Montrer que Y est un vecteur gaussien. (Vous ferez une justification propre en revenant à la définition)
2. Déterminer l'espérance m_Y de Y.
3. Déterminer la matrice de covariance C^Y de Y. En déduire que les Y_k sont indépendantes. (Vous n'utiliserez pas les résultats de cours $\mathbb{E}(AX) = A.\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(XB) = \mathbb{E}(X).B$ mais si besoin vous les re-démontrerez)
4. On suppose de plus que C est une matrice définie positive. On a alors D inversible.
   (a) Quelle est la loi des Y_k? En déduire que Y a une densité que l'on explicitera.
   (b) Montrer que X a une densité que l'on déterminera.

Exercice n°3 :

Soit un vecteur gaussien $X = (X_1, X_2, X_3)'$ de loi normale $\mathcal{N}_3(m, C)$ de densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{120\pi^3}} exp[P(x)] \qquad x = (x_1, x_2, x_3)' \in \mathbb{R}^3$$

avec :

$$P(x) = -\frac{x_1^2}{6} - \frac{7.x_2^2}{15} - \frac{3.x_3^2}{10} - \frac{x_1.x_2}{3} + \frac{2.x_2.x_3}{5} + \frac{x_1}{3} + \frac{2.x_2}{15} + \frac{4.x_3}{5} - \frac{13}{15}$$

1. Déterminer C^{-1} et m.

2. Calculer C et en déduire les moments d'ordre 2 de X puis les lois marginales de X_1 X_2 et X_3.
3. Déterminer la loi de probabilité de :

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} * X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n°4 :
On considère le vecteur gaussien :

$$W = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_6 \left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma \end{pmatrix} \right)$$

où : $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la loi des vecteurs $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$? Ces vecteurs sont-ils indépendants?
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{3}\left((X_1 - X_2) + (Y_1 - Y_2) + (Z_1 - Z_2)\right)$?
3. Quelle est la loi des vecteurs $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$? Ces vecteurs sont-ils indépendants?
4. Quelle est la loi du vecteur aléatoire $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$?