UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Master 1 IMEA - Méthodes de Monte-Carlo - 2009-2010 - 2ème semestre
Sylvain Rubenthaler
http ://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé du devoir no.1

(1) Soit $\varphi \in C_b^+(\mathbb{R})$. Calculons (nous utilisons ici la propriété i.i.d. des variables de l'énoncé)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(X_T)) &= \sum_{i\geq 1}\mathbb{E}(\varphi(X_i)\mathbf{1}_{U_i g(X_i)\leq f(X_i)}\prod_{1\leq j\leq i-1}\mathbf{1}_{U_j g(X_j)\leq f(X_j)}) \\ &= \sum_{i\geq 1}\mathbb{E}(\varphi(X_1)\mathbf{1}_{U_1 g(X_1)\leq f(X_1)})(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{U_1 g(X_1)\leq f(X_1)})^{i-1}\,.\end{aligned}$$

On calcule donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(X_1)\mathbf{1}_{U_1 g(X_1)\leq f(X_1)}) &= \int_{x\in\mathbb{R}}\int_{u\in[0;1]}\varphi(x)\mathbf{1}_{ug(x)\leq f(x)}g(x)dx \\ &= \int_{f(x)\geq g(x)}\varphi(x)g(x)dx + \int_{f(x)<g(x)}\varphi(x)\frac{f(x)}{g(x)}g(x)dx \\ &= \int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x)\inf(f(x),g(x))dx\,.\end{aligned}$$

En prenant $\varphi = 1$, on obtient

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{U_1 g(X_1)\leq f(X_1)}) = \int_{x\in\mathbb{R}}\inf(f(x),g(x))dx\,.$$

Donc la loi cherchée a la densité $h : x \in \mathbb{R} \mapsto \inf(f(x),g(x))/\int_{u\in\mathbb{R}}\inf(f(u),g(u))du$.

(2)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1 g(X_1)\leq f(X_1)) &= \int_{x\in\mathbb{R}}\int_{u\in[0;1]}\mathbf{1}_{ug(x)\leq f(x)}g(x)dudx \\ &= \int_{f(x)\leq g(x)}\frac{f(x)}{g(x)}g(x)dx + \int_{g(x)<f(x)}g(x)dx \\ &= \int_{x\in\mathbb{R}}\inf(f(x),g(x))dx\,.\end{aligned}$$