UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
M1 IMEA - Méthodes de Monte-Carlo
Sylvain Rubenthaler
`http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Devoir no. 2 (à rendre pour le jeudi 25 mars, 18h30 au plus tard, envoyer le programme par courriel avec le nom devoir1-nom-prenom.sce)

On se donne une famille $(\xi_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}^*}$ de variables i.i.d. de même loi qu'une variable ξ. On définit la suite aléatoire $(Z_n)_{n\geq 0}$ récursivement par : $Z_0 = 1$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{n+1,i}$ (il s'agit de la suite de Galton-Watson). Soit $m = \mathbb{E}(\xi_{n,i})$. On veut illustrer le fait que $\mathbb{P}(Z_n > 0) \leq m^n$.

1. Écrire une fonction scilab qui simule une loi de Poisson de paramètre quelconque.
2. Écrire une fonction scilab qui simule une loi de support fini $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_k)$ (la loi μ sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu(\{k\}) = \mu_k$.
3. On s'intéresse au deux cas suivants :
   - $\mathbb{P}(\xi = 0) = 1/3$, $\mathbb{P}(\xi = 1) = 1/2$, $\mathbb{P}(\xi = 2) = 1/6$
   - $\xi \sim \mathcal{P}(3/4)$.

   Dans chacun des deux cas, tracer sur un même graphique les évolutions de $\log(\hat{\mathbb{P}}(Z_n > 0))$ et de $\log(m^n)$ en fonction de n, de $n = 1$ à $n = 250$ et (où $\hat{\mathbb{P}}(\ldots)$ désigne une estimation de Monte-Carlo sur $N = 2000$ échantillons). On pourra faire varier n et N si l'ordinateur n'est pas assez puissant.