UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2009-2010
Sylvain Rubenthaler, http ://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de l'examen - mercredi 5 mai 2010

Durée : 2h.

Documents et calculatrices interdits.

La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.

Les exercices sont indépendants.

1.

(a) Soit $\phi \in C_b^+(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(-V)) &= \int_0^{+\infty} \phi(-v)e^{-v}dv \\
\text{(changement de variable t=-v)} &= \int_0^{-\infty} \phi(t)e^t(-dt) \\
&= \int_{-\infty}^0 \phi(t)e^t dt\,.
\end{aligned}$$

Donc la densité de $-V$ est $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{t\leq 0}e^t$.

(b) La densité de la somme de deux variables indépendantes est la convolée des deux densités. Calculons la fonction de y :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-(y-x)}\mathbf{1}_{y-x\geq 0}e^x\mathbf{1}_{x\leq 0}dx &= \int_{-\infty}^{\inf(0,y)} e^{-(y-x)}e^x dx \\
&= e^{-y}\frac{e^{2\inf(0,y)}}{2}\,.
\end{aligned}$$

La densité cherchée est donc $y \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}\exp(-y + 2\inf(0,y))$.

2.

(a)

- Pour tout $x \in [0;\pi]$, si $x \notin \{0,\pi\}$ $\frac{(\sin x)^n}{1+(cos(x))^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc on a convergence vers 0 pour p.t. x.
- Attention, piège, $\int_0^\pi \frac{(\sin x)^n}{1+(\cos x)^n}dx = +\infty$ pour n impair (se démontre en utilisant un développement limité). On ne peut majorer que pour n pair : $\left|\frac{(\sin x)^n}{1+(\cos x)^n}\right| \leq \frac{1}{1+0} = 1$. N'importe quelle tentative de majoration dans cette question rapporte 1 point.

Donc par théorème de convergence dominée, la limite cherchée est (pour n tendant vers $+\infty$ par valeur paire) 0.

(b)

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{nx}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, et par continuité des fonctions carré, $\sqrt{}$, exp, $\exp\left(-\sqrt{\left(\frac{nx}{n+1}\right)^2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\forall n$, $\left(\frac{nx}{n+1}\right)^2 \geq \frac{x^2}{2}$ donc $\exp\left(-\sqrt{\left(\frac{nx}{n+1}\right)^2}\right) \leq e^{-x^2/2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc par théorème de convergence dominée, la limite cherchée est

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \quad = \quad \sqrt{2\pi}\,.$$

3.

(a) $\left|\frac{1-e^{-xy}}{x}\right| \leq |y|$, $\forall x, y > 0$ et cette fonction est d'intégrale finie ($\int_0^1 y dx = y$) donc F est bien définie.

(b) Soit $M > 0$,

- Pour tout $x \in]0;1]$ (donc pour p.t. x de $[0;1]$), $y \mapsto \frac{1-e^{-xy}}{x}$ est dérivable de dérivée $y \mapsto e^{-xy}$.
- Pour tout $y > 0$, $x \mapsto \frac{1-e^{-xy}}{x}$ est intégrable sur $[0;1]$ (c'est la question précédente).
- Pour tout $0 < y$, $e^{-xy} \leq 1$ qui est intégrable sur $[0;1]$.

Donc par théorème de dérivation, F est dérivable, de dérivée :

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_0^1 e^{-xy} dx \\ &= \frac{1-e^{-y}}{y}\,. \end{aligned}$$

4. Soit $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{|X-X_n|>\epsilon})$.
- Pour p.t. $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{|X(\omega)-X_n(\omega)|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Pour tout n, $\forall \omega$, $\mathbf{1}_{|X(\omega)-X_n(\omega)|} \leq 1$ qui est d'espérance finie.

Donc par théorème de convergence dominée, $\mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

5.

(a) Soit $\phi \in C_b^+(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\phi(U,V)) &= \mathbb{E}(\phi(X-Y,Y)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x-y,y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2} - y\right) \mathbf{1}_{y\geq 0} dx dy\,. \end{aligned}$$

Changement de variables : $u = x - y, v = y$, $x = u + v, y = v$ (ce changement est bien un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Matrice jacobienne

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(\phi(U,V)) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^2} \phi(u,v) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2} - v\right) \mathbf{1}_{v\geq 0} du dv\,.$$

Donc la densité du couple (U,V) est $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2} - v\right) \mathbf{1}_{v\geq 0}$.

(b) Cette densité est le produit d'une fonction de u et d'une fonction de v donc les variables U, V sont indépendantes.