UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 1 IMEA, Méthodes de Monte-Carlo, 2009-2010
Sylvain Rubenthaler
http ://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Examen - mardi 18 mai 2010

Durée : 3h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

Dans tous les exercices, on admet que des tirages successifs de variables aléatoires par la fonction `rand()` renvoient des variables uniformes dans $[0;1]$ indépendantes.

1. On se donne la matrice de transition suivante sur $E = \{1, 2, \ldots, 6\}$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

   On note $(X_i)_{i\geq 0}$ la chaîne de Markov de transition P (sans préciser la mesure initiale, pour le moment).

   (a) Quelles sont les classes récurrentes et transitoires ?
   (b) Calculer la probabilité invariante.
   (c) Soit $T = \inf\{i \geq 1, X_i = 3\}$. Calculer $\mathbb{P}_1(X_{T+1} = 6)$ (l'indice 1 veut dire que $X_0 = 1$). (Comme dans le reste du devoir, on demande une rédaction détaillée.)
   (d) La classe récurrente est-elle apériodique ?
   (e) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_6(X_n = 6)$ (l'indice μ veut dire que X_0 est de loi μ).
   (f) Soit $\tau = \inf\{n \geq 1, X_n = 6\}$. Calculer $\mathbb{E}_4(\tau)$ (l'indice 4 veut dire que $X_0 = 4$).

2. On se donne le programme suivant.

```
s=0 ;
n=1000 ;
for i=1 :n
 b=0 ;
 j=0 ;
 while (b==0)
  j=j+1 ;
  u=rand() ; //ceci renvoie u de loi uniforme sur [0 ;1]
  v=rand() ;
  x=j*(-log(u)) ;
  if (v<3/4) then
   b=1 ;
   y=x ;
  end,
 end,
 s=s+y ;
end,
s=s/n ;
s //affiche s
```

(a) Pour un `j` fixé, quelle est la loi de `x` (donné par les lignes 8 à 10 du programme ci-dessus) ?

(b) Quelles quantité est approchée par `s` ?

3. On se donne le programme suivant.

```
function [z]=f(x)
 if (abs(x)<1) then // abs renvoie la valeur absolue
  z=(2/%pi)*sqrt(1-x^2) ; // sqrt renvoie la racine carrée
 else
  z=0 ;
 end,
endfunction
function [z]=g(x)
 if (abs(x)<1) then
  z=1/2 ;
 else
  z=0 ;
 end,
endfunction
n=1000 ;
s=0 ;
for i=1 :n
 b=0 ;
 while (b==0)
  u=rand() ;
  v=2*rand()-1 ;
  if (u*(4/%pi)*g(v)<f(v)) then
   x=v ;
   b=1 ;
  end,
 end,
 y=x ;
 s=s+y ;
end,
s=s/n ;
s //affiche s
```

(a) Calculer la loi des variables `v` générées par ce programme ?

(b) Quelle est la loi des `y` générées par ce programme ?

(c) Quelle est la quantité approchée par `s` ? (On demande un calcul d'intégrale.)

4. Soit $E = \{\text{cases d'un damier}\} = \{(i,j), 0 \leq i,j \leq 5\}$. On se donne le noyau de Markov R sur E défini par (si (X_n) est une chaîne de Markov de noyau R)

$$\text{Sachant } X_n = (i,j),\ X_{n+1} \begin{cases} = (i+1 \bmod 6, j) & \text{avec proba. } 1/4 \\ = (i-1 \bmod 6, j) & \text{avec proba. } 1/4 \\ = (i, j-1 \bmod 6) & \text{avec proba. } 1/4 \\ = (i, j+1 \bmod 6) & \text{avec proba. } 1/4\,. \end{cases}$$

Plus simplement : pour faire un pas suivant le noyau R, on saute uniformément sur une case adjacente (modulo 6). Par exemple, si on se trouve en $(0,0)$, on saute sur $(0,1),(1,0),(0,5),(5,0)$ respectivement avec la probabilité $1/4$. Rappel : $-1 \bmod 6 = 0$, $1 \bmod 6 = 1$, $2 \bmod 6 = 2$, $3 \bmod 6 = 3$, $4 \bmod 6 = 4$, $5 \bmod 6 = 5$, $6 \bmod 6 = 0$. Pour une case x du damier repérée par ses coordonnées (i,j) $(1 \leq i,j \leq 6)$, on se donne $\pi_x = \frac{1}{Z}\frac{1}{(i+j+1)^{1/2}}$ où Z est la constante telle que $\sum_{x\in E} \pi_x = 1$. On se donne le programme suivant.

```
function [z]=pou(x)
  z=(x(1,1)+x(1,2)+1)^(-0.5) ;
endfunction
function [z]=transition(x) ; // prend en argument un vecteur ligne de longueur
   2
 u=rand() ;
 if (u<1/4) then
  z=[pmodulo(x(1,1)+1,6) x(1,2)] ;
 elseif (u<1/2) then
  z=[pmodulo(x(1,1)-1,6) x(1,2)] ;
  elseif (u<3/4) then
   z=[x(1,1) pmodulo(x(1,2)+1,6)] ;
 else z=[x(1,1) pmodulo(x(1,2)-1,6)] ;
  end,
endfunction
function [t]=densite(x,y) ; //prend en argument deux vecteurs ligne de longueur
   2
 t=0 ;
  if ((abs(x(1,1)-y(1,1))*abs(x(1,2)-y(1,2)))==0) then
  if ((abs(x(1,1)-y(1,1))+abs(x(1,2)-y(1,2)))==1) then
    t=1/4 ;
   elseif ((abs(x(1,1)-y(1,1))+abs(x(1,2)-y(1,2)))==5) then
    t=1/4 ;
   end,
 end,
endfunction
x=[1 1] ;
n=1000 ;
tableau=zeros(n,2) ;
tableau(1, :)=x ; // on écrit x dans la première ligne de tableau
for i=2 :n
 y=transition(x) ;
 u=rand() ;
 if (u<min(1,pou(y)*densite(y,x)*(pou(x)*densite(x,y))^(-1))) then
   x=y ;
  end,
  tableau(n, :)=x ; // on écrit x dans la n-ième ligne du tableau
end,
```

(a) Que calcule la fonction `transition` ?

(b) Que calcule la fonction `densite` ?

(c) On admet que les valeurs successives de `x` (que l'on range dans `tableau` forment une chaîne de Markov. Donner la transition de cette chaîne de Markov (on la notera P) en fonction de R, π. (On demande de refaire une démonstration du cours.)

(d) Montrer que P est irréductible.

(e) Montrer que π est inversible pour P. (On demande de refaire une démonstration du cours.)

(f) Montrer que π est une probabilité invariante pour P. (On demande de refaire une démonstration du cours.)

(g) Notons (Y_n) la chaîne de Markov de transition P (pour une mesure initiale quelconque). On admet que cette chaîne est apériodique. Quelle est la limite de $\mathbb{P}(Y_n = x)$ (x fixé quelconque) quand $n \to +\infty$?